

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
IÉBUS SOUSA FREIRE

**Modelos dinâmicos de medição quântica:
realidade e repouso emergentes**

Curitiba

2018

IÉSUS SOUSA FREIRE

**Modelos dinâmicos de medição quântica:
realidade e repouso emergentes**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná como parte dos requisitos de obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Renato Moreira Angelo

Curitiba

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

F866m

Freire, Iésus Sousa

Modelos dinâmicos de medição quântica: realidade e repouso emergentes / Iésus Sousa Freire. – Curitiba, 2018.

79 p. : il. color. ; 30 cm.

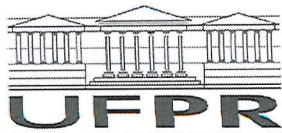
Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2018.

Orientador: Renato Moreira Angelo.

1. Fundamentos de mecânica quântica. 2. Problema da medição. 3. Modelo dinâmico de medição.
I. Universidade Federal do Paraná. II. Angelo, Renato Moreira. III. Título.

CDD: 530.12

Bibliotecária: Romilda Santos - CRB-9/1214



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **IESUS SOUSA FREIRE** intitulada: "**Modelos dinâmicos de medição quântica: realidade e repousos emergentes**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 21 de Fevereiro de 2018.

RENATO MOREIRA ANGELO

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

FERNANDO LUIS DA SILVA SEMIÃO

Avaliador Externo (UFABC)

MARCUS WERNER BEIMS

Avaliador Interno (UFPR)

Agradecimentos

Uma das principais conclusões desses dois anos de pesquisa – que não será discutida no corpo do texto nem aparecerá como conclusão no capítulo correspondente – é a importância de cada pessoa no meu trajeto até aqui. O fim de um ciclo é sempre um momento propício para se refletir sobre essa questão, e o resultado não poderia ser outro se não gratidão por cada um que, em momentos difíceis ou alegres, me deram o prazer de compartilhar de sua companhia. Algumas dessas pessoas já fazem parte dessa caminhada há um bom tempo, enquanto que outras são ainda bastante recentes; algumas por um longo período, já outras foram bastante breves. Todas, no entanto, estão presentes naquilo que me define e com certeza permanecerão naquilo que ainda me tornarei.

Começarei agradecendo ao professor Renato pela orientação e pela partilha do conhecimento, obrigado. Meu obrigado também ao programa de Pós-Graduação em Física pela oportunidade de aprofundar meus estudos e pelo CNPQ pelo suporte financeiro. Obrigado também a todos os professores que contribuíram na minha formação, e em especial àqueles que também contribuíram em minha formação pessoal: Perito, Sofia e Zilma.

Obrigado àquelas que me acompanharam de perto nos percalços da vida acadêmica: Andressa, Fernanda e Greici. À Andressa pelo exemplo de determinação e encorajamento e por colocar sempre um novo ponto de vista às minhas opiniões. À Greici por ser a melhor vizinha de apartamento de todos os tempos e pelos trajetos pelo Botânico conversando sobre a vida e a natureza que nos cercava (e obrigado também à Priscila pela ajuda na mudança!). À Fernanda por expandir minha forma de pensar e sobretudo de questionar, sempre me desafiando em minhas próprias certezas; pela sincronia de estados, mesmo à distância, o que me deu bastante conforto nos últimos tempos; e por me fazer presenciar o que espero ser a chegada de uma primavera pessoal, um novo tempo de novos desafios e novas conquistas.

Aos amigos de longa data por me mostrarem que, mesmo com todas as mudanças da vida, aquilo que tem valor permanece presente. Obrigado a Indyra por todos os cafés, filmes e cartas, por ser uma bússola quando ainda não tinha ideia de qual caminho seguir e pela incrível habilidade de saber a forma e o momento certos de me xingar sempre que preciso; a Rebeca que, apesar de não estarmos mais tão próximos, ainda tenho como minha primeira amiga, lá dos tempos primórdios do IST fazendo provas em dupla, chutando bolas e corrigindo notas de inglês; a Ivonete, que sempre me recebe com o bolo, café e ximango. À equipe marrom, campeões invictos do ensino médio: Iasmin, Caio Lopes, Francly e Marília, pelas partidas de Uno, waffles, listas de matemática conversando e rindo

mais que trabalhando; estar com vocês é certeza de alegria.

A Glauber, que, mesmo com encontros curtos e não tão frequentes como eu gostaria, se fez um amigo compreensivo e acolhedor.

A Sofia, por levar mais cor à Cidade Rosa; e Fred, pour la compagnie dans un pays étranger dans un moment où les difficultés étaient encore trop grandes pour moi.

Aos amigos da mecânica, Digly, Lizama, Pedra, Della, que conseguiram me aguentar reclamando por cinco anos do curso e também pelas páscoas com muito chocolate. Ao Digly e à sua família também pelo acolhimento enquanto estava desabrigado na cidade.

Ivone e família, pela grande ajuda assim que cheguei em Curitiba e no processo do vestibular anos atrás.

Ao melhor grupo do melhor curso de todos os tempos, Marco, Andrea, Lídia, José, pelas sextas feiras depois da aula, pelas discussões incríveis sobre qualquer que fosse o assunto, por entenderem minhas loucuras esporádicas (ou frequentes, talvez) e pela preocupação e cuidado. Obrigado à Andrea, melhor guia turística de São Paulo, pela companhia na sala de aula, aprendendo juntos o ofício de ensinar. À Lídia por saber acolher de uma forma excepcional em momentos de ansiedade e medo e pelos almoços incríveis (aos quais ainda tenho que retribuir). Ao José, que aguenta as brincadeiras e implicações. Ao Marco pela forma incrível com que lê poesias, por ter uma visão de mundo que tanto gosto e com a qual me identifico tanto e pelo ótimo gosto por filmes (quase sempre) e livros.

Obrigado ao Ramon e ao Lucas pela paciência com um garoto perdido em Curitiba anos atrás e por acreditarem em muitas coisas que eu posso, mas que duvidava até que fossem cobradas por vocês. A amizade de vocês deu sentido à cidade, antes desinteressante e chuvosa, e me permitiu fazer de Curitiba uma experiência concreta.

Obrigado ao João por me ajudar a construir uma nova força a partir das minhas próprias fraquezas e uma nova coragem a partir dos meus próprios medos, pela paciência e por me mostrar quão bom é vitamina de pêssego com mamão.

À minha família, cujas união e animação não deixam nunca de me impressionar.

Por fim o agradecimento que deveria ser o mais simples, mas o simples às vezes se coloca como o mais difícil. Eu poderia simplesmente agradecer por tudo, o que não estaria incorreto, mas é vazio de sentido. Agradeço então a tia Léia, que embora tia é também mãe, pelo registro da infância nas fotografias, por me ter como filho de alma e pelo cuidado na infância. A Vovone, pela proteção e pelo cuidado constante. A mãe Ane por se dedicar com tanto empenho em minha criação, não imagino quantas dificuldades tiveram de ser superadas para que isso pudesse ser realizado.

*É preciso criar de novo. Reinventar nagôs e latinos,
E as mais severas inscrições, e quantos ensinamentos e os modelos mais finos,
de tal maneira a vida nos excede e temos de enfrentá-la com poderosos recursos.
Mas seja humilde tua valentia. Repara que há veludo nos ursos.
(Carlos Drummond de Andrade)*

Resumo

Partindo da consideração da medição como um processo de interação entre seus diversos componentes – como objeto medido, aparato de medição, ambiente, observador –, o trabalho objetiva desenvolver um modelo dinâmico de medição quântica de posição que reproduza a emergência de realidade e repouso verificados nesse processo. Para isso, buscou-se um modelo efetivo no qual as diversas variáveis envolvidas fossem consideradas como uma dependência temporal do Hamiltoniano do sistema, como no caso clássico de um sistema com dissipação. O modelo escolhido para estudo foi proposto inicialmente por Caldirola e posteriormente, de forma independente por Kanai, denominado modelo Kanai-Caldirola (KC). A fim de se verificar a emergência de realidade foi necessário discretizar os espaços de posição e momento dado que a irrealidade escolhida para o desenvolvimento do trabalho, proposta por Bilobran e Angelo, se aplica a espaços de dimensão finita. Dentro desse formalismo discretizado, buscou-se recuperar os elementos julgados mais importantes dentro da teoria tradicional contínua, como o princípio de incerteza dos operadores de posição e momento canônico, e delimitar sua capacidade de atuação. Foi encontrada uma fórmula analítica para o cômputo das irrealidades de posição e momento de um pacote Gaussiano e pôde-se ainda identificar o que foi denominado de complementaridade de elementos de realidade de observáveis incompatíveis, que delimita uma quota mínima para a soma das irrealidades de posição e momento. Esse último resultado foi comparado com casos similares encontrados na literatura relativos a desigualdades para somas de entropias. Foi realizado o cômputo das irrealidades para o caso de um pacote Gaussiano sujeito ao Hamiltoniano KC, verificando-se a emergência da realidade promovida pela sua evolução. Além disso, a partir da definição clássica de repouso e do postulado relativo ao processo de medição, buscou-se definir um equivalente quântico de repouso e verificou-se que este modelo consegue reproduzir tal efeito. Baseado na pré-medida de von Neumann, o modelo do trabalho foi expandido considerando-se duas massas interagentes como uma tentativa de reproduzir a interação entre aparato medidor e partícula medida. Esse modelo se mostrou mais interessante que seu antecessor dado que, além da realidade e do repouso, ele reproduz também o caráter estatístico da medição, o que não se verifica ao se considerar apenas a partícula.

Palavras-chave: Fundamentos de mecânica quântica. Problema da medição. Modelo dinâmico de medição.

Abstract

Starting from the consideration of measurement as a process of interaction between its various components – as measured object, measuring apparatus, environment, observer –, this work aims at developing a dynamic model of quantum measurement of position that reproduces the irreversible emergence of reality and rest in this process. To this end, an effective model is introduced which attempts to implement the relevant aspects of the measurement process by means of an explicit time dependence in the system Hamiltonian, as in the classic case of a system with dissipation. The model chosen for study was initially proposed by Caldirola and independently by Kanai, thus being referred to as Kanai-Caldirola (KC) model. In order to verify the emergence of reality it was necessary to discretize the spaces of position and moment given that the chosen measure of unreality for the development of the work, proposed by Bilobran and Angelo, applies to spaces of finite dimension. Within this discretized formalism, we tried to recover the most important elements considered within the traditional continuous theory, such as the uncertainty principle of the operators of position and canonical moment, and to delimit their capacity of performance. An analytical formula was found for the computation of the uncertainties for position and momentum of a Gaussian package and it was possible to identify what was called complementarity of elements of reality of incompatible observables, which delimits a minimum quota for the sum of the unrealities of position and moment. This last result was compared with similar cases found in the literature regarding inequalities for sums of entropies. The computation of the unrealities was performed in the case of a Gaussian package subject to the Hamiltonian KC, verifying the emergence of the reality promoted by its evolution. Moreover, from the classical definition of rest and the postulate related to the measurement process, we tried to define a quantum equivalent of rest and it was verified that this model can reproduce such effect. Based on the von Neumann pre-measurement, the work model was expanded considering two interacting masses as an attempt to reproduce the interaction between the measuring apparatus and the measured particle. This model proved to be more interesting than its predecessor since, in addition to reality and rest, it also reproduces the statistical character of the measurement, which does not occur when considering only the particle.

Keywords: Fundamentals of quantum mechanics. Measurement problem. Dynamic measurement model.

Lista de ilustrações

Figura 1 – (a) A preparação ρ é determinada via tomografia. (b) Após a preparação, o observável \mathcal{O}_1 é medido pelo agente externo, tornando-se real antes da tomografia, a qual fornece o mapa $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)$. Se $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) = \rho$, então a medição apenas revela um elemento de realidade pré-existente. Figura retirada da Referência 13.	27
Figura 2 – Incerteza na posição de um estado gaussiano no formalismo discreto.	37
Figura 3 – Produto das incertezas Δ_Q e Δ_P para um estado gaussiano no formalismo discretizado.	38
Figura 4 – (a) Posição e (b) velocidade de uma partícula sujeita a um potencial do tipo oscilador harmônico amortecido para $\frac{p_0}{m_0 q_0} = \frac{k_0 q_0}{p_0} = 1s^{-1}$. Verifica-se da imagem que a partícula atingirá o repouso em cada um dos regimes apresentados dado que $(q_0, p_0) \rightarrow (0, 0)$ no limite $\tau \rightarrow \infty$	49
Figura 5 – (a) Momento canônico e (b) Hamiltoniana de uma partícula sujeita a um potencial do tipo oscilador harmônico amortecido para $\frac{p_0}{m_0 q_0} = \frac{k_0 q_0}{p_0} = 1s^{-1}$	49
Figura 6 – (a) Valor médio e (b) desvio padrão do operador Q para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Partícula Amortecida com $\frac{p_0}{q_0 \lambda m_0} = 1$ e $\frac{\hbar}{\lambda m_0 \Delta_{q,0}^2} = 1$	59
Figura 7 – Valor médio dos operadores (a) Q e (b) P para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Oscilador Harmônico Amortecido no regime superamortecido, com $\lambda/\omega = 1.1$. As outras constantes envolvidas foram tomadas como unitárias.	61
Figura 8 – Desvio médio dos operadores (a) Q e (b) P para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Oscilador Harmônico Amortecido no regime superamortecido, com $\lambda/\omega = 1.1$, e (c) o produto dessas incertezas. As outras constantes envolvidas foram tomadas como unitárias.	61
Figura 9 – Valor médio dos operadores (a) Q e (b) P para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Oscilador Harmônico Amortecido no regime subamortecido, com $\lambda/\omega = 0.1$. As outras constantes envolvidas foram tomadas como unitárias.	62
Figura 10 – Desvio médio dos operadores (a) Q e (b) P para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Oscilador Harmônico Amortecido no regime subamortecido, com $\lambda/\omega = 0.1$ e (c) o produto dessas incertezas. As outras constantes envolvidas foram tomadas como unitárias.	62

Figura 11 –Valor médio do operador V_H para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Oscilador Harmônico Amortecido no regime subamortecido com (a) $\lambda/\omega = 0.1$ (b) $\lambda/\omega = 1.1$. As outras constantes envolvidas foram tomadas como unitárias.	64
Figura 12 –Desvio médio do operador V_H para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Oscilador Harmônico Amortecido no regime subamortecido com (a) $\lambda/\omega = 0.1$ (b) $\lambda/\omega = 1.1$. As outras constantes envolvidas foram tomadas como unitárias.	64
Figura 13 –Emaranhamento de duas partículas sujeitas a um potencial relativo do tipo oscilador harmônico amortecido com $\lambda/\omega = 0.7$ e outros parâmetros tomados como unitários.	68
Figura 14 –Densidade de probabilidade de um estado bipartido composto pela superposição de dois estados Gaussianos em cada um dos subsistemas, onde a parte tracejada corresponde à coordenada de índice j e a parte de linha cheia à coordenada de índice i	69

Sumário

1	Introdução.	12
2	Preliminares Teóricos.	16
2.1	Formalismo Matemático da Mecânica Quântica	16
2.2	Entropia de Estados Quânticos	21
2.3	Emaranhamento	23
2.4	O Problema da Medição	24
2.5	Elementos de Realidade e Medida de Irrealidade	27
3	Medida de Irrealidade de Posição e Momento	30
3.1	Espaços Discretizados	30
3.2	Dinâmica Discreta	32
3.3	Autoestados de Momento	33
3.4	Estado Gaussiano	35
3.5	Medida de Irrealidade	40
3.6	Complementaridade de elementos de realidade	44
4	Modelo Dinâmico Efetivo de Medições de Posição	46
4.1	Hamiltonianos Dependentes do Tempo	46
4.2	Análise Clássica	47
4.3	Análise Quântica	51
4.4	Massas Acopladas	66
5	Conclusão	72
	Referências	75

1 Introdução

Costumamos atribuir às coisas propriedades que lhe seriam inerentes. Quando nos referimos a alguma propriedade específica de determinado objeto na vida cotidiana, ignoramos todo tipo de interação necessária para acessar a informação que a revela. Dessa forma, atribuímos a propriedade, ou a informação de tal propriedade, ao objeto, utilizando na estrutura da língua uma relação de posse entre este e aquela. Não somente no português, mas em diversas das línguas modernas fazemos uso do verbo *ter* - e seus equivalentes em outros idiomas - ao nos referirmos a essa relação: a mesa *tem* dois metros de largura. A linguagem, sendo ela uma ferramenta essencial para nossa forma de conceber e traduzir o mundo, nos revela bastante sobre nossas conclusões tácitas a respeito da realidade e de cada elemento que a compõe.

Evidenciar essa questão revela nossa total desconsideração de que as propriedades são na verdade fruto da interação de alguém que mede e algo que é medido. Um processo dinâmico para a obtenção de determinada informação. Ao se medir uma mesa, por exemplo, levamos ao encontro dela algum objeto com um comprimento de referência, como uma régua. A aproximação que se faz promove interação entre todo o ambiente ao redor, havendo correntes de ar, transferência de calor ou mesmo deformações da mesa e da régua. Mesmo o ato de observar requer que fótons interajam com o objeto e com o observador em um processo dinâmico. Evidentemente, tais interações são suficientemente pequenas para que possam, de fato, ser ignoradas macroscopicamente.

David Bohm vai ainda mais longe nessa linha de pensamento, colocando em cheque a fragmentação que fazemos entre a ação e os elementos que a compõem ao utilizarmos as estruturas gramaticais recorrentes baseadas em sujeito-verbo-objeto [1]. Ele chega a pensar uma outra estrutura na qual a interação desempenharia um papel mais importante que aqueles desempenhados pelos elementos dessa interação, ou seja, em que o verbo teria uma função primária em detrimento do sujeito ou do objeto. Uma das características dessa estrutura é que nenhuma propriedade poderia ser atribuída às coisas, como costumamos fazer, mas seriam o resultado da dinâmica em curso a cada instante.

Esse pensamento estava também presente nas ciências até o advento da teoria Quântica no início do século XX. Até então, a realidade parecia ser totalmente descrita pela mecânica Newtoniana e pela teoria eletromagnética de Maxwell, que regiam, respectivamente, matéria e radiação, e a interação entre essas entidades eram explicadas pela força de Lorentz. Essas teorias carregam as pressuposições costumeiras acerca da realidade, não havendo qualquer incompatibilidade com o que se observa cotidianamente no mundo. Ocorre, no entanto, que essas teorias eram incapazes de dar uma resposta satisfatória ao

problema da *radiação do corpo negro*, o que foi feito a partir da suposição de Planck de que a energia é *quantizada*, ou seja, assume apenas valores que sejam múltiplos inteiros de uma grandeza fundamental. Tal grandeza fundamental é o produto da frequência da onda emitida pelo corpo, ν , e a constante de Planck h .

A solução sugerida por Planck culminou no desenvolvimento de toda uma nova teoria, a Mecânica Quântica, na qual contribuíram inúmeros físicos durante um longo período da história. Diferentemente do que se tem cotidianamente, as interações necessárias à obtenção das propriedades físicas não podem ser desconsideradas no universo quântico. Nessas escalas, as interações são demasiado evidentes para que não sejam levadas em conta e a consideração de que as propriedades são intrínsecas aos objetos se mostra geralmente inválida. Nas palavras de Bohm:

As propriedades quânticas não podem ser ditas como pertencentes unicamente ao sistema observado e, de forma mais geral, tais propriedades não têm nenhum sentido fora do contexto relevante em cada situação particular. [...] Na física clássica não importa o quanto a partícula observada é fundamentalmente perturbada, suas leis fundamentais de interação se mantêm as mesmas. Por conta disso as propriedades básicas da partícula podem ser vistas como intrínsecas não importa quão forte seja a interação. Mas na teoria quântica tais propriedades podem somente ter sentido dentro do contexto que seja relevante.

A medição ganha então um papel de destaque dentro da teoria quântica, sendo responsável por várias das divergências de interpretação dessa teoria [2, 3], que, quase um século depois do desenvolvimento da teoria, continuam a existir. Como dito por Mermin [4]: "Novas interpretações surgem todos os dias. Nenhuma nunca desaparece". Na Ref. [5], tem-se uma compilação de algumas das interpretações recorrentes.

Um dos principais problemas ocorre da emergência do que chamaremos mais à frente de um *elemento de realidade* de determinada grandeza física, em outras palavras, de como esse processo dinâmico produz propriedades bem definidas como as que observamos cotidianamente. O que se tem em algumas interpretações é de que essa emergência se daria pelo fenômeno do *colapso* [6, 7], no qual o estado a princípio indefinido do sistema seria determinado de forma instantânea após o processo de medição de uma dada grandeza física, denominada também de observável. Essa evolução se daria de forma aleatória e, portanto, irreversível, visto que não seria possível construir o estado precedente a partir de um estado dado. Surge daí um confronto entre a evolução reversível e determinista prevista pela equação de Schrödinger para os estados quânticos e a questão de por que o processo de medição seria necessariamente diferente de qualquer outro processo dinâmico na natureza.

Discussões entre os pioneiros da teoria quântica levaram ao desenvolvimento da interpretação de Copenhague [8, 9, 10], na qual o colapso é um dos postulados da teoria.

Seus defensores tentaram solucionar o problema a partir da suposição de que os aparelhos de medição são necessariamente clássicos, não se sujeitando às previsões quânticas e sendo um elemento externo a esta, e colocando o colapso como um dos postulados da teoria. Apesar de dar uma resposta ao problema, essa filosofia levanta outra questão: qual seria o corte? Quão grande deve ser o sistema para que ele se comporte de maneira clássica? A falta de respostas para essas novas perguntas levou à busca de novas soluções.

Von Neumann foi o primeiro a propor um modelo dinâmico de medição inserindo tanto o sistema medido quanto o aparato medidor em sua descrição [11], sendo o sistema total fechado e composto dessas duas partes cuja interação e evolução se dá de forma totalmente quântica. Diferentemente dos defensores da interpretação de Copenhague, von Neumann defendia a universalidade da teoria quântica, devendo também os aparatos de medição se sujeitarem a ela. O rigor adotado por ele foi suficientemente bom para que sua teoria de medição seja usada ainda hoje.

Já os pioneiros a discutir a natureza da realidade fornecida pela teoria quântica foram Einstein, Podolsky e Rosen [12], levantando a questão de que a descrição fornecida pela teoria poderia não ser completa. De acordo com eles, determinada quantidade física teria um elemento de realidade associado a si somente quando fosse possível prevê-la sem de forma alguma perturbar o sistema. No entanto, como argumentado aqui, no regime quântico isso nem sempre será satisfeito. Um caso específico em que isso ocorre é após uma medição, situação após a qual a grandeza física medida terá realidade bem definida. Isso não será necessariamente verdadeiro para qualquer outro observável que não o que foi medido, como ocorre entre a posição e o momento conjugado. Por conta do princípio de incerteza, a realidade dessas grandezas são mutuamente excludentes: não se pode ter realidade simultânea de ambas.

Uma das motivações deste trabalho é entender como pode ocorrer de a partícula permanecer com a mesma posição no caso de sucessivas medições apesar de seu momento canônico ser totalmente indefinido. Como pode, tendo seu momento um valor arbitrário, a partícula permanecer em uma mesma posição entre as duas medições sendo este o responsável pela translação do sistema? Pode-se dizer que esta partícula está em repouso em relação a algum referencial? E qual seria a devida interpretação do momento canônico?

A fim de trabalhar essas questões, buscou-se um modelo matemático no qual a partícula é levada dinamicamente a um estado bem definido de posição. O que se espera é ver surgir desse modelo o elemento de realidade associado à posição ao mesmo tempo em que se promove o repouso da partícula. A escolha final foi de fazer o estudo por meio de um sistema efetivo fechado e dissipativo, no qual as variáveis externas à partícula serão tratadas de forma equivalente à dinâmica em um meio viscoso, ou seja, a partir da adição de dependência temporal no Hamiltoniano do sistema. Evidentemente não se espera que esse modelo seja capaz de explicar todo o processo de medição, mesmo porque, se tratando

de um modelo efetivo, muitas das informações são perdidas ao se simplificar um sistema tão complexo. Porém, como no caso dos sistemas dissipativos clássicos, espera-se poder extrair alguma intuição física a partir de um modelo consideravelmente mais simples.

O trabalho foi dividido de forma que o [Capítulo 2](#) abordará os conceitos e o formalismo matemático necessários para o desenvolvimento do que foi proposto. O formalismo do colapso será abordado de forma mais rigorosa, bem como o modelo de medição desenvolvido por von Neumann. Os conceitos de entropia e seu papel como medida de informação também terão destaque, em especial para a posterior definição do elemento de realidade proposto por Bilobran e Angelo [13].

O [Capítulo 3](#) tem como objetivo adequar o modelo desenvolvido no capítulo precedente ao uso dos conceitos de elemento de realidade. Para isso, foi necessário pensar um processo de discretização dos espaços de posição e momento dada a impossibilidade de aplicação direta em espaços contínuos dos conceitos definidos em espaços discretos. Exige-se também o condicionamento de algumas das ferramentas matemáticas para o caso de uma base dimensional, o que também é feito neste capítulo. Por fim, faz-se uma discussão da complementariedade de elementos de realidade no caso da posição e do momento, comparando com resultados similares encontrados na literatura.

O [Capítulo 4](#) trará o modelo matemático escolhido. Será feita inicialmente uma discussão teórica a respeito dos modelos efetivos com Hamiltonianos dependentes do tempo, seguida das análises clássica e quântica. Por fim, serão levadas as questões trabalhadas para o contexto do processo de medição, permitindo tratar diretamente os problemas levantados. Argumenta-se sobre uma possível condição de repouso do sistema e aponta-se a emergência de realidade, verificando uma melhor descrição do processo de medição a cada complexidade adicionada ao sistema.

O trabalho é concluído apontando-se as perspectivas de pesquisas futuras e com uma breve revisão dos resultados obtidos e das questões tratadas.

2 Preliminares Teóricos

*E de onde o tamanho do mundo se fazia maior, transclaro,
sempre com um fundo de engano, em seus ocultos fundamentos.
(Guimarães Rosa)*

2.1 Formalismo Matemático da Mecânica Quântica

A teoria quântica é fundamentada em alguns postulados básicos que serão apresentados em seguida. O número e conteúdo desses postulados são até certo ponto uma questão de escolha ou de conveniência, podendo-se encontrar diferentes enunciações a depender da referência que se tome.

Postulado 1. *Atribui-se um espaço vetorial complexo dotado de produto interno (dito espaço de Hilbert e denotado por H) a todo sistema físico isolado. O sistema é completamente descrito pelo seu vetor estado $|\psi\rangle$, um vetor unitário pertencente ao espaço de Hilbert.*

O produto interno neste espaço é denotado por $\langle\psi_i|\psi_j\rangle$, sendo a condição de normalização escrita $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Dois estados são ditos ortogonais quando $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = 0$ e um conjunto $\{|\psi_i\rangle\}$ ortonormal quando $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$.

Tem-se ainda que a combinação linear de dois vetores é também um vetor desse espaço, ou seja, para $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in H$ tem-se que $|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle \in H$, com $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Um estado arbitrário pode então ser escrito como uma combinação linear de um conjunto completo e ortonormal na forma

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle, \quad (2.1)$$

com os coeficientes c_k dados por $c_k = \langle\psi_k|\psi\rangle$. O número de elementos de um conjunto completo e ortonormal é chamado dimensão do espaço, n , e corresponde ao limite do somatório da combinação linear. Essa propriedade matemática traduz o princípio físico de superposição.

Postulado 2. *A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por um operador unitário. Ou seja, o estado $|\psi_0\rangle$ num instante t_0 está relacionado ao estado $|\psi\rangle$ num instante t por meio do operador de evolução unitário U que depende apenas dos instantes t_0 e t :*

$$|\psi\rangle = U(t, t_0)|\psi_0\rangle. \quad (2.2)$$

O postulado pode ser enunciado ainda por meio da equação de Schrödinger, que coloca

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \mathcal{H} |\psi\rangle, \quad (2.3)$$

sendo \mathcal{H} o operador Hamiltoniano do sistema e $i^2 = -1$. A dinâmica de um sistema é então totalmente conhecida caso se saiba o estado inicial e o Hamiltoniano responsável por sua dinâmica.

O operador de evolução se associa ao Hamiltoniano do sistema de acordo com

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = \mathcal{H} U(t, t_0). \quad (2.4)$$

Considerando a possibilidade mais geral em que o Hamiltoniano é dependente do tempo e não comuta em tempos distintos, $[\mathcal{H}(t_1), \mathcal{H}(t_2)] \neq 0$, esse operador pode ser dado pela série

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{H}(t_1) \mathcal{H}(t_2) \cdots \mathcal{H}(t_n). \quad (2.5)$$

Postulado 3. *Todo observável físico é descrito por um operador linear e Hermitiano atuante no espaço H e possui um conjunto completo de autovetores $|a_n\rangle$, também denominados autoestados, com seus correspondentes autovalores a_n de forma que*

$$A|a_k\rangle = a_k|a_k\rangle. \quad (2.6)$$

Os únicos valores possíveis de se obter em uma medição de determinado observável físico são seus autovalores a_k .

Do fato de os operadores serem Hermitianos, está garantido que seus autovalores são reais, podendo assim ser associados ao resultado de uma medição. O valor esperado $\langle A \rangle$ de um operador A para um dado estado $|\psi\rangle$ é dado por

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle, \quad (2.7)$$

e o desvio quadrático médio ΔA por

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}. \quad (2.8)$$

Os operadores têm decomposição espectral da forma

$$A = \sum_k a_k P_k, \quad (2.9)$$

onde $P_k = |a_k\rangle\langle a_k|$ é o projetor associado ao autoestado $|a_k\rangle$ e o limite do somatório a dimensão do espaço sobre o qual A atua. Esses projetores satisfazem as relações de hermiticidade, completeza e idempotência, respectivamente:

$$P_k = P_k^\dagger, \quad (2.10a)$$

$$\sum_k P_k = \mathbb{1}, \quad (2.10b)$$

$$P_k P_{k'} = \delta_{k,k'} P_k. \quad (2.10c)$$

A nomeação de *projedor* para os operadores P_k advém da sua atuação em um estado arbitrário, visto que ele o projeta no autoestado $|a_k\rangle$ de A . De sua atuação resulta $P_k|\psi\rangle = \langle a_k|\psi\rangle|a_k\rangle$.

Postulado 4. Para um observável A de autoestados $|a_k\rangle$ e autovalores correspondentes a_k , a probabilidade de se obter o valor a_k na medição de um estado $|\psi\rangle$ é dada por

$$\mathcal{P}(a_k) = \langle \psi | P_k | \psi \rangle. \quad (2.11)$$

Dado que o resultado da medição seja a_k , o estado imediatamente após a medição é

$$\frac{P_k|\psi\rangle}{\sqrt{\mathcal{P}(a_k)}}. \quad (2.12)$$

Esse postulado coloca algumas questões de fundamental importância para a teoria e para a motivação do trabalho. Primeiro, caso sejam realizadas medições sucessivas de um mesmo observável A , a teoria prevê que serão obtidos sempre os mesmos valores a_k . De fato, a probabilidade de se obter a_i quando o sistema se encontra no estado $|a_k\rangle$ é $\mathcal{P}(a_i) = \langle a_k | P_i | a_k \rangle = |\langle a_i | a_k \rangle|^2 = \delta_{ki}$, dado que os estados são ortogonais. Então a probabilidade de se obter algum valor diferente de a_k é nula, enquanto que a de se obter a_k é a unidade.

Tem-se ainda que o valor médio e o desvio quadrático de um operador para um de seus autoestados são $\langle A \rangle = \langle a_k | A | a_k \rangle = a_k$ e $\Delta A = \sqrt{\langle a_k | A^2 | a_k \rangle - \langle a_k | A | a_k \rangle^2} = 0$, corroborando o fato de que o único valor possível de se obter é a_k .

Segundo, essa transição se dá a princípio de forma instantânea e aleatória, indo de encontro com a evolução unitária também postulada na teoria. São dois princípios fundamentalmente diferentes pois, enquanto a evolução unitária fornece uma dinâmica determinística e reversível, o processo de medição parece implicar uma transição de caráter probabilístico e irreversível. Essa é uma das questões que compõem o problema da medição na mecânica quântica, que será tratado com mais detalhes posteriormente.

Postulado 5. O espaço de um sistema composto é o produto tensorial dos espaços correspondentes aos componentes desse sistema, $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, sendo m o número de componentes.

Há ainda outra forma de postular os mesmos princípios, não por meio do vetor estado, mas do *operador densidade*. Os formalismos são matematicamente equivalentes, como será mostrado, mas este último fornece um ferramental mais adequado para tratar

diversas situações recorrentes na mecânica quântica. A diferença fundamental entre esses formalismos é que, diferentemente do vetor estado, o operador densidade pode não fornecer toda a informação necessária para que se tenha uma descrição completa do estado físico.

Essa distinção pode ser exemplificada imaginando-se um cenário em que um físico entrega a um aluno um elétron em um determinado estado físico cada dia da semana. Digamos que fique combinado entre os dois que, dos sete elétrons a serem entregues, três estarão com spin para cima e os outros quatro com spin para baixo. Ao fim da semana, caso o aluno deseje descrever o estado que obteve na quarta-feira, ele não poderá fazê-lo por meio de um vetor estado dado que ele não conhece totalmente o sistema físico que possui. A melhor descrição possível nesse cenário, que inclui a ignorância do aluno quanto ao estado, seria dizer que existe probabilidade $\frac{3}{7}$ de que o estado seja de spin para cima e $\frac{4}{7}$ de spin para baixo.

Essas probabilidades são, no entanto, meramente subjetivas uma vez que o físico pode descrever o estado da quarta-feira com total conhecimento do mesmo e atribuir a ele um vetor estado. Percebe-se então um caráter clássico dessas probabilidades, originadas também de uma ignorância do sujeito quanto ao sistema e não de alguma propriedade probabilística que lhe seja intrínseca. Matematicamente, denota-se o operador densidade como ρ . No cenário tomado como exemplo, o estado seria descrito como

$$\rho = \frac{3}{7} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{4}{7} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \quad (2.13)$$

Essa forma é fundamentalmente diferente de uma superposição do tipo $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{7}} |\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{4}{7}} |\downarrow\rangle$. Para o estado (2.13) não se observa efeitos quânticos de interferência quando medido o spin na direção z , por exemplo, indicando realidade desse observável. Além disso, as probabilidades associadas ao operador densidade foram mostradas como sendo meramente subjetivas, enquanto que a do estado $|\psi\rangle$ são inerentes ao seu caráter quântico.

Pode-se reformular o Postulado 1 atribuindo-se a cada estado físico um operador densidade ρ , também denominado matriz densidade. Como se trata de um operador, tal estado pode ser dado de forma geral pela mistura de estados puros,

$$\rho = \sum_k r_k |r_k\rangle\langle r_k|. \quad (2.14)$$

Nessa concepção, teríamos probabilidade r_k de se obter o estado puro $|r_k\rangle$. Esses estados satisfazem determinadas propriedades como:

Hermiticidade

$$\rho = \rho^\dagger; \quad (2.15)$$

Unitariedade

$$\text{Tr}[\rho] = 1; \quad (2.16)$$

Positividade:

$$\langle \rho \rangle_\alpha = \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle \geq 0, \quad (2.17)$$

para todo $|\alpha\rangle \in H$.

Quando a combinação dada por (2.14) é composta de apenas um termo, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, o estado é dito puro e recupera-se o formalismo descrito inicialmente. Nesse caso temos $\rho^2 = \rho$, propriedade denominada idempotência, que implica $\text{Tr}[\rho^2] = 1$. Pode-se mostrar que, em caso de um estado que não seja puro, denominado estado misto, $\text{Tr}[\rho^2] < 1$. Há ainda os estados ditos maximamente mistos, dados por $\rho = \frac{\mathbb{1}}{n}$, sendo n a dimensão do espaço e $\mathbb{1}$ a identidade do espaço.

A evolução de um sistema isolado é dada também pela atuação de um operador unitário dependente apenas dos instantes t_0 e t , $U(t, t_0)$, de forma que

$$\rho_t = U(t, t_0) \rho_0 U^\dagger(t, t_0), \quad (2.18)$$

onde $U^\dagger(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0)$. Sua evolução pode ainda ser dada em termos da equação de Liouville-von Neumann:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = [\mathcal{H}(t), \rho_0], \quad (2.19)$$

equivalente à equação de Schrödinger no formalismo de estados puros.

Os valores médios dos observáveis são calculados como

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{Tr}[\rho \mathcal{O}] = \sum_k r_k \langle r_k | \mathcal{O} | r_k \rangle. \quad (2.20)$$

Da mesma forma que no caso anterior, os únicos valores possíveis de se obter ao medir determinado observável são seus auto-valores, sendo as probabilidades de se obter o autovalor o_n dada por

$$\mathcal{P}(o_n) = \text{Tr}[O_n \rho], \quad (2.21)$$

sendo O_n o projetor associado ao autoestado $|o_n\rangle$.

De maneira geral, em um sistema bipartido $H = H_1 \otimes H_2$, o estado logo após a medição de um observável $\mathcal{O} = \sum_n o_n O_n$ atuante no subsistema representado por H_1 e com saída o_n é

$$\mathcal{C}_{o_n|\mathcal{O}}(\rho) = \frac{O_n \rho O_n}{\mathcal{P}(o_n)} = O_n \otimes \rho_{2|o_n}, \quad (2.22)$$

sendo $\rho_{2|o_n} = \text{Tr}_1(O_n \rho O_n) / p_n$ o estado do subsistema H_2 . Vê-se novamente a repetibilidade dos resultados para um mesmo observável, pois atuando-se consecutivamente com uma medida de \mathcal{O} obtém-se $\mathcal{C}_{o_n|\mathcal{O}}(\mathcal{C}_{o_n|\mathcal{O}}(\rho)) = \mathcal{C}_{o_n|\mathcal{O}}(\rho)$. Ocorre também a contradição entre transição instantânea e aleatória de um estado ρ para o estado dado pela Eq. (2.22) e a evolução unitária prescrita pela Eq. (2.19).

2.2 Entropia de Estados Quânticos

Um conceito de fundamental importância no campo da teoria da informação é o conceito de entropia. A ideia central desse conceito é medir a quantidade de incerteza presente em um estado físico [14]. Por se tratar aqui de sistemas quânticos, essas incertezas podem se originar por dois fatores distintos: uma incerteza clássica, uma ignorância que o observador tem quanto ao sistema; e uma incerteza quântica intrínseco ao sistema, irreduzível.

No caso do formalismo quântico, uma das formas mais comuns de mensurar essa grandeza é a partir da entropia de von Neumann, definida por

$$S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \ln \rho]. \quad (2.23)$$

Escrevendo-se o estado ρ em sua forma diagonal, como em (2.14), a entropia se escreve

$$S(\rho) = -\sum_k w_k \ln w_k = S_H(w_k), \quad (2.24)$$

com $S_H(w_k)$ sendo a entropia de Shannon, relacionada aos sistemas clássicos. Apesar da similaridade matemática e mesmo conceitual, não se deve esquecer que, por se tratar de sistemas quânticos, a entropia de von Neumann carrega ambos os tipos de incertezas presentes nesses sistemas, enquanto que a entropia de Shannon é capaz apenas de perceber a incerteza de origem clássica.

Algumas das propriedades matemáticas fundamentais da entropia de von Neumann são:

(i) Não negatividade. $S(\rho) \geq 0$, ocorrendo a igualdade $S(\rho) = 0$ somente no caso de ρ ser um estado puro.

(ii) Limitação superior. A entropia é limitada pelo valor $\ln n$, sendo n a dimensão do espaço H . Tal limite ocorre no caso de um estado maximamente misto, $\rho = I/n$, que corresponde ao estado de máxima ignorância sobre o sistema.

(iii) Invariância sob transformações unitárias. $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$.

(iv) Concavidade. Tem-se, para $p_k > 0$ e $\sum_k p_k = 1$, $S(\sum_k p_k \rho_k) \geq \sum_k p_k S(\rho_k)$.

(v) Subaditividade. Para um estado bipartido ρ_{AB} , $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$, sendo $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$ e $\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$ e com a igualdade ocorrendo somente no caso em que o estado for descorrelacionado, $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$.

(vi) Desigualdade triangular. Ainda para um estado bipartido, a entropia satisfaz $S(\rho_{AB}) \geq |S(\rho_A) - S(\rho_B)|$.

(vii) Subaditividade forte. Para estados tripartidos, ρ_{ABC} , tem-se $S(\rho_{ABC}) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AB}) + S(\rho_{BC})$.

(viii) Teorema da entropia conjunta. Sendo p_k probabilidades, $|k\rangle$ estados ortogonais de um sistema A e ρ_k um conjunto de operadores densidade para um sistema B . Nesse caso,

$$S\left(\sum_k p_k |k\rangle\langle k| \otimes \rho_k\right) = S_H(p_k) + \sum_k p_k S(\rho_k). \quad (2.25)$$

Por conta de suas duas primeiras propriedades é que lhe atribuída a interpretação física de ignorância sobre o sistema. Como dito anteriormente, um estado quântico puro representa a máxima informação que um observador pode ter sobre o sistema, situação na qual a entropia se anula. Já no estado de máxima mistura a informação sobre o sistema é mínima, situação na qual a entropia atinge seu valor máximo. Entre esses extremos, a função toma valores intermediários proporcionais ao número de possíveis estados do sistema, da mesma forma que a entropia termodinâmica usual.

Outra maneira de quantificar a entropia é por meio da entropia linear, escrita

$$S_L(\rho) = 1 - \text{Tr} \rho^2. \quad (2.26)$$

Como já mencionado anteriormente, $\text{Tr} \rho^2 = 1$ para estados puros e $\text{Tr} \rho^2 = \frac{1}{n}$ para estados maximamente misturados. Logo, como no caso da entropia de von Neumann, a entropia linear também se encaixa na concepção de uma medida de ignorância do sistema pelas mesmas razões. Essa grandeza é também usada como medida de pureza de estados quânticos, questão que será desenvolvida posteriormente.

Apesar de partilharem conteúdo conceitual, elas não concordam quanto ao valor numérico. De fato, o cômputo dessas quantidades nem sempre será equivalente, como é o caso de um estado maximamente misto, para o qual $S_L = 1 - 1/n$ e $S = \ln n$. No entanto, ambas trazem as mesmas informações quanto à pureza e à separabilidade do estado.

A conexão entre essas grandezas pode ser feita a partir da definição de uma entropia generalizada, ou entropia-(q,s), introduzida por Hu e Ye [15] e definida como

$$S_{(q,s)}(\rho) = \frac{(\text{Tr} \rho^q)^s - 1}{s(1 - q)}, \quad (2.27)$$

com $q > 0$, $q \neq 1$ e $s \neq 0$. Algumas propriedades como não-negatividade e concavidade estão presentes nessa entropia assim definida. Dessa definição é possível obter, para $s = 1$, a entropia de Tsallis:

$$S_{(q,1)} = \frac{(\text{Tr} \rho^q) - 1}{1 - q}, \quad (2.28)$$

a partir da qual tem-se a entropia linear quando $q = 2$, $S_{(2,1)}(\rho) = S_L(\rho)$. No caso limite de $q \rightarrow 1$, $S_{(1,1)}$ recai, por sua vez, na entropia de von Neumann. Tem-se ainda, a partir da entropia generalizada no caso limite em que $s \rightarrow 0$, a entropia de Rényi:

$$S_{(q,0)}(\rho) = \frac{\ln \text{Tr} \rho^q}{1 - q}. \quad (2.29)$$

A entropia generalizada não satisfaz, no entanto, algumas propriedades fundamentais como a aditividade [16]. Por conseguinte, é sempre necessário recuperar alguma das formas acima após o uso de (2.27). Essa forma generalizada pode, no entanto, facilitar cálculos que seriam bastante complicados de se obter diretamente das formas específicas. A entropia de von Neumann, por exemplo, pode ser bastante trabalhosa por exigir a diagonalização do estado, o que nem sempre é viável. A entropia generalizada permite ainda uma transição mais elegante entre as outras formas de entropia por conectá-las em uma forma única.

O conceito de entropia permite reformular o princípio de incerteza de Heisenberg, definido para um estado $|\psi\rangle$ por

$$\Delta_A \Delta_B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|, \quad (2.30)$$

sendo Δ_A e Δ_B as incertezas associadas aos observáveis A e B , respectivamente. Sendo $A = \sum_a a |a\rangle \langle a|$ e $B = \sum_b b |b\rangle \langle b|$ as decomposições espectrais de A e B , define-se a fidelidade máxima entre os autovetores $|a\rangle$ e $|b\rangle$ como $f(A, B) \equiv \max_{a,b} |\langle b | a \rangle|$. Então a generalização entrópica do princípio determina [17]

$$S_H(a) + S_H(b) \geq 2 \ln \left(\frac{1}{f(A, B)} \right). \quad (2.31)$$

2.3 Emaranhamento

No caso de sistemas físicos compostos ou multipartidos, tem-se que o espaço de Hilbert associado se decompõe em dois ou mais subsistemas e é dado pelo produto tensorial destes: $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_n$, cada espaço H_k correspondendo a um subsistema. Em casos assim, outras propriedades dos sistemas quânticos podem ser percebidas, como o emaranhamento. Para o estudo que segue, será considerado apenas o caso bipartido, $H = H_1 \otimes H_2$.

Um estado puro é dito emaranhado quando não houver nenhum $|\psi_1\rangle \in H_1$ e $|\psi_2\rangle \in H_2$ tal que o estado total do sistema $|\psi\rangle$ possa ser escrito como $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Caso tais estados existam, o estado é dito separável. Ocorre dessa definição que, ao realizar uma medida em apenas uma das partes, não somente o subsistema colapsa mas o sistema como um todo. Isso implica, por sua vez, que os resultados obtidos da medição de um dos subsistemas são influenciados por medidas realizadas no outro subsistema.

De maneira análoga, define-se um estado misto separável como o estado ϱ que pode ser escrito como uma mistura de estados produto da forma

$$\varrho = \sum_k p_k \rho_k^{(1)} \otimes \rho_k^{(2)}, \quad (2.32)$$

com $p_k > 0$ e $\sum_k p_k = 1$. Tais estados apresentam correlações que, no entanto, podem ser escritas por meio de probabilidades clássicas e, por conta disso, são consideradas correlações

clássicas. Já um estado misto do tipo $\varrho = \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$ não apresenta tais correlações, mas é menos genérico que (2.32). Dada tal definição, diz-se que um estado misto é emaranhado quando não pode ser escrito na forma de uma soma convexa, ou seja, não existem $\rho_k^{(1)}$, $\rho_k^{(2)}$ e $p_k > 0$ tais que $\varrho = \sum_k p_k \rho_k^{(1)} \otimes \rho_k^{(2)}$.

Não é simples, no entanto, dizer quando um estado arbitrário ϱ é separável. Uma vez que a definição é dada por meio da existência de um estado do tipo (2.32), seria necessário encontrar uma soma convexa para o estado de interesse, o que pode não ser nada óbvio. Pode acontecer ainda de o estado ser de fato emaranhado e todas as tentativas de escrevê-lo como uma soma convexa seriam inúteis. Foi então necessário encontrar formas mais simples de se afirmar quando um estado é de fato emaranhado ou mesmo de quantificar esse emaranhamento.

Para estados puros e estados mistos de pequena dimensão já se conhece várias ferramentas que permitem essa quantificação, enquanto que para estados mistos de grandes dimensões ainda não se tem nenhum quantificador que cumpra o papel de maneira satisfatória [18].

Para o caso de estados puros, a entropia pode desempenhar o papel de uma medida de emaranhamento, e, além de ser bastante conhecida na literatura [19, 18], é a ferramenta escolhida na sequência do trabalho. Define-se a entropia de emaranhamento para um estado puro ϱ atuando em $H = H_1 \otimes H_2$ como $E(\varrho) = S(\rho^{(1)})$, com $\rho^{(1)} = \text{Tr}_2 \varrho$ e $S(\rho^{(1)}) = S(\rho^{(2)})$.

2.4 O Problema da Medição

O problema da medição trata da emergência das propriedades clássicas a partir da teoria quântica descrita até então. São levantadas questões como, por exemplo, por que não se observa no dia a dia estados superpostos permitidos pelos espaços de Hilbert ou como se dá a interação do sistema a ser medido com o aparato medidor e o colapso do estado descrito anteriormente. A própria formulação do problema é, no entanto, problemática, o que torna difícil sua definição já de partida [20, 21]. Isso acontece pela vastidão de possíveis interpretações dentro da Mecânica Quântica, que levam a diferentes pontos de vista sobre o problema [2, 3]. Há mesmo vertentes dentro da física que não consideram existir qualquer problema de medida [22, 23], enquanto outros afirmam acreditar que esta é uma questão fundamental a ser trabalhada pela ciência do nosso tempo [24].

Uma tentativa de esquematizar esse problema foi feita por von Neumann [11]. Nesse esquema, foi considerado um espaço total composto pelos espaços do sistema a ser medido (S) e sistema ou aparato medidor (A): $H^{n \times m} = H_S^n \otimes H_A^m$, com n e m a dimensão de cada um dos espaços. Supondo que o sistema esteja em uma superposição $|\alpha\rangle = \sum_k \alpha_k |s_k\rangle$, sendo cada $|s_k\rangle$ ($k = 1, \dots, n$) um vetor de base de H_S^n , e o aparato em um estado $|\varphi\rangle$, o estado total é descrito pelo produto tensorial dos estados em cada subsistema e evolui de

acordo com

$$|\varphi\rangle \otimes |\alpha\rangle = |\varphi\rangle \otimes \sum_k \alpha_k |s_k\rangle \rightarrow \sum_k \alpha_k |s_k\rangle \otimes |\varphi_k\rangle, \quad (2.33)$$

onde cada $|\varphi_k\rangle$ é um estado em H_A^m correlacionado ao estado $|s_k\rangle$ em H_S^n , a partir do qual pode-se definir o estado do sistema a ser medido a partir do resultado obtido no sistema medidor, como um ponteiro. O sistema total, que num instante inicial é separável, torna-se emaranhado à medida que os subsistemas interagem entre si, ampliando a superposição antes contida apenas no sistema a ser medido para o conjunto total e correlacionando os estados $|s_k\rangle$ e $|\varphi_k\rangle$.

A dinâmica descrita por (2.33) é denominada na literatura de pré-medida de von Neumann e, por si só, não é suficiente para descrever o processo de medida. De fato, o lado direito da equação apresenta uma superposição de estados do aparato, o que, sem a devida interpretação ou algum processo físico adicional como o colapso, não permite definir qual é a posição do ponteiro de fato obtida em uma medida. A partir da pré-medida é possível enunciar as duas partes do problema da medição, que tratam da não observação de efeitos quânticos macroscopicamente (transição quântica-clássica) e da redução do estado (ou colapso da função de onda).

O primeiro problema é resultado da não unicidade da escolha da base a partir da qual se descreve o estado final do aparato emaranhado ao sistema a ser medido, ou seja, a descrição dada por (2.33) não é unicamente definida. De fato, é possível escrever o lado direito como

$$\sum_k \alpha_k |s_k\rangle \otimes |\varphi_k\rangle = \sum_k \alpha'_k |s'_k\rangle \otimes |\varphi'_k\rangle = \sum_k \alpha''_k |s''_k\rangle \otimes |\varphi''_k\rangle = \dots \quad (2.34)$$

A existência de uma *base preferida* não pode então ser explicada pelo estado final do sistema pois não há nenhuma razão que justifique a saída $|s_k\rangle \otimes |\varphi_k\rangle$ ao invés de $|s'_k\rangle \otimes |\varphi'_k\rangle$.

Além disso, na forma em que é escrita, a pré-medida de von Neumann não impossibilita que o resultado de um processo de medição seja uma superposição do tipo $|s_k\rangle \otimes |\varphi_k\rangle + |s_i\rangle \otimes |\varphi_i\rangle$. Da mesma forma, podendo haver superposição dos estados, deveria também ser possível de se observar padrões de interferência no aparato medidor. Isso no entanto não é verificado experimentalmente, o que se tem são sempre valores físicos bem definidos como resultado de uma medição.

O segundo problema consiste em saber como se dá a transição entre o lado direito de (2.33) e o estado final do sistema $|s_k\rangle \otimes |\varphi_k\rangle$. Qual seria o processo que seleciona tal estado? Nesse ponto as interpretações divergem drasticamente, não havendo ainda nenhuma resposta satisfatória para o problema. A interpretação ortodoxa determina a existência do colapso, que, como já comentado, vai de encontro à evolução unitária e determinista também postulada nessa teoria.

A contradição entre as duas evoluções prescritas no formalismo são ainda mais contrastantes no cenário de dois observadores pensado por Everett. Um desses observadores, Bob, está dentro de um laboratório realizando um processo de medição e o outro, Alice, fica do lado de fora. Para Bob, o sistema total é formado pelo aparato e pelo sistema a ser medido, enquanto que para Alice o sistema total inclui, além do aparato e do sistema a ser medido, Bob. Ao ser efetivada a medida, Bob dirá que seu estado colapsou, sofrendo a transição aleatória para seu estado final dada por (2.22). Para Alice, que não realizou nenhuma medida, o sistema deve continuar evoluindo de forma unitária. A questão é, como podem dois observadores descreverem um mesmo processo físico de formas completamente diferentes? Se o estado de Alice evolui unitariamente e deterministicamente, como pode ter sofrido uma transição aleatória do ponto de vista de Bob?

O primeiro problema já é considerado como resolvido pelo processo da descoerência cuja formulação foi desenvolvida inicialmente por Zeh [25, 26, 27]. A principal contribuição da descoerência no desenvolvimento da dinâmica da medição foi considerar como aberto o sistema composto por aparato e sistema medido pois, dado o caráter macroscópico daquele, seria impossível o tratamento sem considerar também o ambiente que os cerca.

Seguindo o mesmo pensamento de von Neumann, o ambiente foi incluído como parte do sistema total e a evolução desses três estados resulta em um estado final emaranhado e é dada da seguinte forma

$$|E\rangle \otimes |\varphi\rangle \otimes |\alpha\rangle = |E\rangle \otimes |\varphi\rangle \otimes \sum_k \alpha_k |s_k\rangle \rightarrow \sum_k \alpha_k |s_k\rangle \otimes |\varphi_k\rangle \otimes |E_k\rangle. \quad (2.35)$$

O operador densidade desse estado puro pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \varrho &= \left(\sum_i \alpha_i |s_i\rangle \otimes |\varphi_i\rangle \otimes |E_i\rangle \right) \left(\sum_j \alpha_j^* \langle s_j| \otimes \langle \varphi_j| \otimes \langle E_j| \right) \\ &= \sum_{i=j} |\alpha_i|^2 |s_i\rangle \langle s_i| \otimes |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| \otimes |E_i\rangle \langle E_i| + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j^* |s_i\rangle \langle s_j| \otimes |\varphi_i\rangle \langle \varphi_j| \otimes |E_i\rangle \langle E_j|, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde o segundo somatório são os termos fora da diagonal principal, responsáveis pelos efeitos quânticos como a interferência.

O argumento da descoerência é de que, ao se fazer uma medição, não se leva em conta o efeito do ambiente e o mesmo é desprezado na descrição, o que matematicamente é feito pelo traço parcial desse sistema e tem como resultado um sistema quântico aberto. Ou seja, o estado ao qual se tem acesso é dado por

$$\begin{aligned} \rho_{SA} &= \text{Tr}_E \varrho = \sum_{i=j} |\alpha_i|^2 |s_i\rangle \langle s_i| \otimes |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| \otimes \langle E_i| E_i \rangle + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j^* |s_i\rangle \langle s_j| \otimes |\varphi_i\rangle \langle \varphi_j| \otimes \langle E_j| E_i \rangle \\ &= \sum_{i=j} |\alpha_i|^2 |s_i\rangle \langle s_i| \otimes |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|, \end{aligned} \quad (2.37)$$

sendo a segunda igualdade resultado da ortonormalidade dos autoestados do ambiente. Percebe-se que o estado ρ_{SA} é uma mistura estatística de estados puros, com probabilidade

$|\alpha_i|^2$ de se obter o estado $|s_i\rangle\langle s_i| \otimes |\varphi_i\rangle\langle \varphi_i|$, não havendo mais nenhum termo de interferência nem sendo possível obter uma superposição como resultado de uma medida. O problema da base preferida também é dado como explicado pelo processo de descoerência porém exige uma maior elaboração, motivo pelo qual não será desenvolvido aqui. Na Ref. [27] pode-se encontrar o desenvolvimento de forma bastante detalhada.

Apesar de ter sucesso em explicar o primeiro problema, a descoerência não é capaz de dar uma solução ao segundo. As saídas das medições continuam tendo caráter probabilístico e com uma dinâmica de colapso ainda contradizendo a outra forma de evolução dada pelas equações (2.3) e (2.19).

2.5 Elementos de Realidade e Medida de Irrealidade

Desde o célebre artigo de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [12], vem-se tentando definir uma noção de realidade dentro da física. Nesse trabalho, publicado em 1935 e titulado "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete", os autores definem os conceitos de completeza e realidade como:

- (a) Completeza EPR - Todo elemento de realidade física deve possuir um correspondente na teoria;
- (b) Elemento de Realidade EPR - Se, sem perturbar o sistema, for possível prever com certeza (com probabilidade igual a um) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade física correspondente a esta quantidade física.

Ainda nesse capítulo foi mostrado que um estado sobre o qual foi realizado uma medida, escrito $\mathcal{C}_{a|A}(\rho)$ para uma medida de A com saída a , é possível prever com certeza o resultado de uma outra medida do observável A , visto que $\mathcal{C}_{a|A}(\mathcal{C}_{a|A}(\rho)) = \mathcal{C}_{a|A}(\rho)$. Ou seja, sempre teremos o mesmo resultado para medidas consecutivas de um mesmo observável, sendo então possível prever com probabilidade unitária o valor dessa quantidade física.

Ocorre, no entanto, que esse cenário é válido apenas quando um mesmo observável A é medido consecutivamente. Caso se deseje medir B , não haverá necessariamente um Elemento de Realidade EPR associado à grandeza física.

No decorrer do trabalho será utilizada a definição de elemento de realidade desenvolvida por Bilobran e Angelo [13], baseado em um protocolo tomográfico ilustrado na Figura 1. Para descrever esse protocolo considera-se um estado composto de n partições, n podendo se referir a n partículas em uma dimensão ou uma única partícula com n graus de liberdade, que é dado a um observador. Esse observador deve, a partir da realização de quantas medições forem necessárias em qualquer observável desejado, descrever completamente o estado ρ , pertencente ao espaço $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_n$, a ele dado.

Em seguida a mesma tarefa lhe é designada, porém com a realização de uma medida

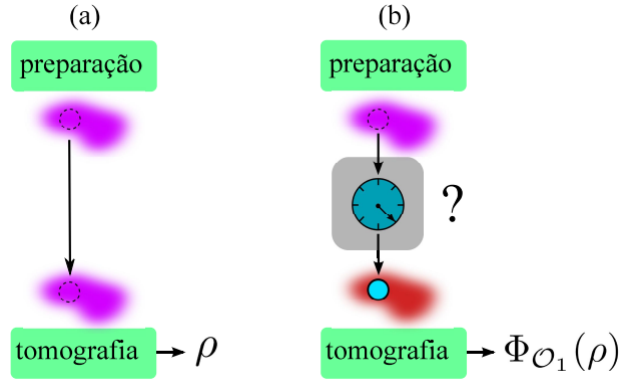


Figura 1 – (a) A preparação ρ é determinada via tomografia. (b) Após a preparação, o observável \mathcal{O}_1 é medido pelo agente externo, tornando-se real antes da tomografia, a qual fornece o mapa $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)$. Se $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) = \rho$, então a medição apenas revela um elemento de realidade pré-existente. Figura retirada da Referência 13.

por um agente externo, e sem o conhecimento do observador, de um observável \mathcal{O}_1 de projetores O_n e autovalores o_n satisfazendo (2.9) e (2.10) atuando no espaço H_1 . Essa segunda etapa é similar ao exemplo usado para introduzir o conceito de matriz densidade e no qual um físico entrega a seu aluno um estado a cada dia da semana, pois tanto o aluno quanto o observador têm ignorância quanto a um estado totalmente conhecido por um outro agente. Como prevê o formalismo da medição, a melhor descrição possível para esse estado é

$$\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) \equiv \sum_n O_{1n} \rho O_{1n} = \sum_n p_{1o_n} O_{1n} \otimes \rho_{2|o_n}, \quad (2.38)$$

sendo $\rho_{2|o_n} = \text{Tr}_1(O_{1n} \rho O_{1n}) / p_{1o_n}$ o estado do sistema após a medida com saída o e $p_{1o_n} = \text{Tr}(O_{1n} \rho O_{1n})$ a probabilidade de tal saída. O estado $\Phi_{\mathcal{O}_1}$ em (2.38) escreve o procedimento de medições realizadas pelo agente externo e não lidas pelo observador.

A partir do critério de EPR, pode-se dizer que nesse segundo cenário existe um elemento de realidade associado a \mathcal{O}_1 . Isso porque é possível, para o agente externo, prever o resultado de uma medição desse observável. Para o observador, no entanto, não existe tal possibilidade uma vez que ele desconhece as medições que foram realizadas, o que permite ao cenário total ir além da definição de EPR pois foi adicionada uma ignorância subjetiva quanto ao estado. Apesar da (2.38) não permitir a previsão do resultado de uma medição de \mathcal{O} , isso não implica que seu valor já não esteja definido previamente, indicando que pode haver um elemento de realidade sem que seja possível prever o resultado da medição.

A ignorância subjetiva do observador é representada pelas probabilidades p_{1o} . Quando se tem $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) = \rho$, o observador encarregado de descrever o estado deve concluir que já havia previamente um elemento de realidade associado a \mathcal{O}_1 , sendo que suas medidas não definiram mas apenas revelaram uma realidade preexistente.

Dito isso, pode-se definir o elemento de realidade tendo incluída a ignorância subjetiva quanto ao estado como:

Elemento de Realidade Bilobran-Angelo (BA) - Um observável $\mathcal{O}_1 = \sum_o o P_{1o}$, com projetores $P_{1o} = |o\rangle\langle o|$ agindo sobre H_1 é real para uma dada preparação $\rho \in \otimes_{i=1}^n H_i$ se e somente se

$$\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) = \rho. \quad (2.39)$$

A partir do critério de realidade acima, é possível definir também a irrealidade de um observável \mathcal{O}_1 para uma preparação $\rho \in H$ como

$$\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho) \equiv S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)) - S(\rho), \quad (2.40)$$

onde $S(\rho)$ é a entropia de von Neumann. Essa grandeza informa quão distante um estado ρ está de um estado com realidade definida, ou seja, quão irreal é esse estado. Essa medida é não negativa, $\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho) \geq 0$, pois a atuação de um para Φ nunca reduz a entropia do sistema [17], e a igualdade ocorre somente no caso $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) = \rho$, ou seja, quanto ρ for real. Deve-se ressaltar que essa medida não depende somente do estado, mas também do observável de interesse, sendo plenamente possível obter estados para os quais determinado observável é real enquanto outro é irreal. Apesar de ser definida em termos da entropia de von Neumann, é possível que sejam utilizadas outras definições de entropias a fim de tornar o desenvolvimento matemático mais simples.

3 Medida de Irrealidade de Posição e Momento

Esse capítulo tem por objetivo o cálculo das irrealidades de posição e momento, para o qual é necessário realizar uma discretização dos respectivos espaços. A sequência consiste na apresentação dos princípios básicos da discretização e suas consequências seguida do estudo de alguns casos particulares – autoestado de momento e o estado Gaussiano – e da definição e cômputo das irrealidades. O formalismo discretizado desenvolvido aqui e suas consequências formam uma das partes originais da dissertação.

3.1 Espaços Discretizados

O formalismo descrito no [Capítulo 2](#) é válido para espaços de Hilbert discretos, de base finita. A extensão para um espectro contínuo requer certos cuidados matemáticos e há aspectos da teoria discreta que não se aplicam no caso contínuo. Valores esperados para operadores nesses espaços podem ser calculados como

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 q' \int_{-\infty}^{\infty} d^3 q'' \langle q'' | \rho | q' \rangle \langle q' | \mathcal{O} | q'' \rangle, \quad (3.1)$$

com a matriz do operador densidade definida como

$$\langle q'' | \rho | q' \rangle = \langle q'' | \left(\sum_k w_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \right) | q' \rangle = \sum_k w_k \Psi_k(q'') \Psi_k^*(q'), \quad (3.2)$$

sendo $\Psi_k(q) \equiv \langle q | \psi_k \rangle$ a função de onda correspondente ao estado $|\psi_k\rangle$.

Apesar de haver generalizações de determinados conceitos para o caso contínuo, questões como elemento de realidade e entropia ainda não têm respostas satisfatórias. A proposta de Elemento de Realidade requer, em sua definição, a existência de projetores para o observável de interesse. Tais projetores, no entanto, não podem ser definidos no caso de espaços de Hilbert contínuos. De fato, caso se deseje tentar definir um projetor para o operador posição Q do tipo $\Pi = |q\rangle \langle q|$, tem-se a seguinte limitação:

$$\Pi \Pi' = |q\rangle \langle q | q' \rangle \langle q'| = \delta(q - q') |q\rangle \langle q'| = \begin{cases} 0 & \text{se } q \neq q', \\ \infty & \text{se } q = q'; \end{cases} \quad (3.3)$$

o que não satisfaz a propriedade de idempotência, $\Pi^2 = \Pi$, característica dos projetores.

Existem também problemas associados à definição da entropia no caso contínuo [28]. Caso se deseje, a partir de (2.23), derivar um equivalente contínuo, verifica-se que tal entropia não será sempre positiva e pode ainda assumir valores infinitamente grandes

[29]. Valores negativos e infinitos impossibilitam a interpretação da entropia como uma grandeza de incerteza, inviabilizando seu uso.

Para que se torne possível o desenvolvimento do método até então descrito no espaço das posições, propõe-se discretizá-lo. Nesse processo, o produto interno dos autoestados de posição toma a forma

$$\langle q_j | q_i \rangle = \frac{\delta_{ij}}{\delta_q}, \quad (3.4)$$

e os projetores

$$\Pi_j = \delta_q |q_j\rangle \langle q_j|, \quad (3.5)$$

onde δ_q é a divisão desse espaço, que deve ser real e positivo e limitado (pequeno). Este é o parâmetro ajustável do modelo discretizado.

Nessa forma, os projetores satisfazem as propriedades esperadas:

$$\Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_j, \quad (3.6a)$$

$$\sum_{j=-L_q}^{L_q} \Pi_j = \mathbb{1}; \quad (3.6b)$$

sendo L_q o limite do somatório, que está relacionado à dimensão do espaço discreto, e virá a ser determinado posteriormente como função de δ_q .

A expansão em autoestados de posição se dá então por:

$$|\psi\rangle = \sum_{j=-L_q}^{L_q} \Pi_j |\psi\rangle = \sum_{j=-L_q}^{L_q} \delta_q \langle q_j | \psi \rangle |q_j\rangle = \sum_{j=-L_q}^{L_q} \delta_q \Psi(q_j) |q_j\rangle, \quad (3.7)$$

com $\Psi(q_j) \equiv \langle q_j | \psi \rangle$ uma função discreta na variável q_j . A discretização do espaço permite escrever tal variável na forma $q_j = \delta_q j$, com j inteiro.

Um processo análogo de discretização é realizado no espaço dos momentos:

$$\langle p_j | p_i \rangle = \frac{\delta_{ij}}{\delta_p}, \quad (3.8)$$

que permite a definição de projetores

$$\Xi_j = \delta_p |p_j\rangle \langle p_j|, \quad (3.9)$$

onde δ_p é uma escala mínima de momento, que deve ser real e positiva.

As expansões em autoestados de momento se dão então por:

$$|\phi\rangle = \sum_{j=-L_p}^{L_p} \Xi_j |\phi\rangle = \sum_{j=-L_p}^{L_p} \delta_p \langle p_j | \phi \rangle |p_j\rangle = \sum_{j=-L_p}^{L_p} \delta_p \Phi(p_j) |p_j\rangle, \quad (3.10)$$

com $\Phi(p_j) \equiv \langle p_j | \phi \rangle$ uma função discreta na variável p_j e L_p também a ser determinado posteriormente.

3.2 Dinâmica Discreta

A verificação de que esses espaços mantêm certas propriedades é fundamental. Partindo das ideias já consolidadas [30], toma-se o momento como o operador responsável pelo processo de translação,

$$\mathcal{T}(\delta_q) = \mathbb{1} - \iota \frac{P}{\hbar} \delta_q, \quad (3.11)$$

com $\mathcal{T}(\delta_q)$ satisfazendo

$$\mathcal{T}(\delta_q)|q_j\rangle = |q_j + \delta_q\rangle = |q_{j+1}\rangle. \quad (3.12)$$

Nessa forma, com P Hermitiano, a translação satisfaz as propriedades esperadas quando, se presentes, desconsideramos efeitos de segunda ordem:

$$\mathcal{T}(-\delta_q) = \mathcal{T}^\dagger(\delta_q); \quad (3.13a)$$

$$\mathcal{T}^\dagger(\delta_q)\mathcal{T}(\delta_q) = \mathbb{1}; \quad (3.13b)$$

$$\mathcal{T}(\delta'_q)\mathcal{T}(\delta_q) = \mathcal{T}(\delta'_q + \delta_q); \quad (3.13c)$$

$$\lim_{\delta_q \rightarrow 0} \mathcal{T}(\delta_q) = \mathbb{1}. \quad (3.13d)$$

Outra propriedades fundamental satisfeita é a comutação:

$$[Q, \mathcal{T}(\delta_q)] = \delta_q. \quad (3.14)$$

De fato:

$$Q\mathcal{T}(\delta_q)|q_j\rangle = Q|q_j + \delta_q\rangle = (q_j + \delta_q)|q_j + \delta_q\rangle; \quad (3.15)$$

$$\mathcal{T}(\delta_q)Q|q_j\rangle = q_j\mathcal{T}(\delta_q)|q_j\rangle = q_j|q_j + \delta_q\rangle \quad (3.16)$$

e

$$[Q\mathcal{T}(\delta_q) - \mathcal{T}(\delta_q)Q]|q_j\rangle = \delta_q|q_j + \delta_q\rangle \approx \delta_q|q_j\rangle, \quad (3.17)$$

onde o erro associado à aproximação é de segunda ordem. Como a propriedade é verdadeira para quaisquer estados de posição, e estes formam um conjunto completo, tem-se a igualdade na comutação expressa por (3.14). Essa propriedade implica, por sua vez,

$$[Q, P] = \iota\hbar. \quad (3.18)$$

Partindo da definição de momento como gerador de translação, é possível determinar como será sua representação no espaço das posições:

$$\langle q_j | \mathcal{T}(\delta_q) | \psi \rangle = \langle q_j | \left(1 + \iota \frac{P}{\hbar} \delta_q \right) | \psi \rangle = \langle q_j + \delta_q | \psi \rangle = \Psi(q_j) + \delta_q \frac{\Psi(q_j + \delta_q) - \Psi(q_j)}{\delta_q}. \quad (3.19)$$

Comparando os termos, conclui-se que

$$\langle q_j | P | \psi \rangle = -\iota \hbar \frac{\Psi(q_j + \delta_q) - \Psi(q_j)}{\delta_q} \equiv -\iota \hbar \Psi'(q_j). \quad (3.20)$$

O momento é, nessa descrição, como uma derivação discreta em q . No caso limite $\delta_q \rightarrow 0$, tem-se a definição usual do momento como a derivada contínua em q .

3.3 Autoestados de Momento

Atuando com o operador momento e um elemento de base de posição em um autoestado de momento, tem-se a igualdade

$$\langle q_j | P | p_i \rangle = -\iota \hbar \frac{\langle q_j + \delta_q | p_i \rangle - \langle q_j | p_i \rangle}{\delta_q} = p_i \langle q_j | p_i \rangle. \quad (3.21)$$

Tomando como base a forma contínua da onda plana $\langle q_j | p_i \rangle$, espera-se que

$$\langle q_j | p_i \rangle \propto \exp \left[\iota \frac{p_i}{\hbar} q_j \right]. \quad (3.22)$$

Calculando-se a derivada discreta definida em (3.20) para a forma proposta de $\langle q_j | p_i \rangle$, tem-se:

$$\exp \left[\iota \frac{p_i}{\hbar} q_j \right] \frac{\exp \left[\iota \frac{p_i}{\hbar} \delta_q \right] - 1}{\delta_q} \cong \iota \frac{p_i}{\hbar} \exp \left[\iota \frac{p_i}{\hbar} q_j \right] \frac{1 + \iota \frac{p_i}{\hbar} \delta_q - 1}{\iota \frac{p_i}{\hbar} \delta_q} = \iota \frac{p_i}{\hbar} \exp \left[\iota \frac{p_i}{\hbar} q_j \right]. \quad (3.23)$$

Logo, a forma proposta satisfaz, a menos de erros de segunda ordem e do fator de normalização, a equação de autovalor do operador momento:

$$\langle q_i | p_k \rangle = \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} e^{\iota \frac{p_k q_i}{\hbar}}. \quad (3.24)$$

A obtenção do fator de normalização parte das igualdades satisfeitas pelos estados de posição,

$$\langle q_i | q_j \rangle = \sum_{k=-L_q}^{L_q} 2\delta_p \langle q_i | p_k \rangle \langle p_k | q_j \rangle = \frac{1}{A} \sum_{k=-L_q}^{L_q} e^{\iota \frac{p_k}{\hbar} (q_i - q_j)} = \frac{\delta_{ij}}{\delta_q}, \quad (3.25)$$

sendo a última dentre elas passível de verificação a partir de propriedades das funções exponenciais e trigonométricas:

$$\sum_{k=-n}^n e^{\iota k x} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}. \quad (3.26)$$

Tomando $x = \frac{2\pi m}{2n+1}$, com m inteiro, tem-se, para $m \neq j(2n+1)$,

$$\frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{\sin(\pi m)}{\sin \left(\frac{\pi m}{2n+1} \right)} = \frac{0}{\sin \left(\frac{\pi m}{2n+1} \right)} = 0. \quad (3.27)$$

Já para $m = j(2n + 1)$, a expressão é, a princípio, indeterminada. Esse problema pode ser contornado utilizando o limite em que $m \rightarrow j(2n + 1)$ a partir da regra de l'Hôpital ou a expressão na forma de somatório de cossenos. Nessa segunda opção, tem-se

$$1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2jk\pi) = 1 + 2n, \quad (3.28)$$

visto que ambos k e j são inteiros. Assim sendo, a expressão resultante é:

$$\frac{\sin(\pi m)}{\sin\left(\frac{\pi m}{2n+1}\right)} = \begin{cases} 2n+1 & \text{se } m = k(2n+1), \\ 0 & \text{se } m \neq k(2n+1); \end{cases} \quad (3.29)$$

implicando que esse somatório converge para uma soma infinita de deltas de Kronecker de espaçamento $k(2n + 1)$ quando normalizado pelo fator $2n + 1$. Pode-se escrever então, dividindo-se a igualdade por $2n + 1$ e tomando-se $m = i - j$ e

$$2n + 1 = \xi = \frac{2\pi\hbar}{\delta_q \delta_p}, \quad (3.30)$$

$$\sum_{k=-\frac{\xi-1}{2}}^{\frac{\xi-1}{2}} e^{i\frac{p_k}{\hbar}(q_i - q_j)} = \frac{2\pi\hbar}{\delta_q \delta_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_{m,j(2n+1)} = \xi \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_{m,j\xi}. \quad (3.31)$$

Analisando-se o primeiro termo de (3.31), é possível associar ao parâmetro ξ a interpretação de dimensão do espaço dos momentos, visto que a identidade desse espaço será composta por ξ termos. Além disso, esse termo tem relação direta com ambas as resoluções δ_q e δ_p . Esse espaço será então limitado, com dimensão finita, desde que as resoluções sejam diferentes de zero.

No entanto, a forma encontrada ainda não se relaciona diretamente com a identidade (3.25). Para isso, é necessário notar que a mesma conclusão sobre o parâmetro ξ se aplica igualmente no espaço de posições. Assim sendo, ambos os espaços estarão limitados pela mesma quantidade. Sendo o espaço de posições limitado, os possíveis valores de m em (3.29) e (3.31) se restringem aos limites $-2n$ e $2n$, visto que estas são as maiores diferenças $i - j$, com $i, j \in [-n, n]$, sendo $n = \frac{\xi-1}{2}$.

Reescrevendo as igualdades (3.29) e (3.31) com a restrição identificada, tem-se

$$\frac{\sin(\pi m)}{\sin\left(\frac{\pi m}{2n+1}\right)} = \begin{cases} 2n+1 & \text{se } m = 0, \\ 0 & \text{se } m \neq 0; \end{cases} \quad (3.32)$$

e

$$\sum_{k=-\frac{\xi-1}{2}}^{\frac{\xi-1}{2}} e^{i\frac{p_k}{\hbar}(q_i - q_j)} = \xi \delta_{m,0} = \xi \delta_{ij}; \quad (3.33)$$

$i, j \in [-n, n]$.

Isso permite escrever, por sua vez,

$$\langle q_i | q_j \rangle = \frac{1}{A} \sum_{k=-\frac{\xi-1}{2}}^{\frac{\xi-1}{2}} \delta_p e^{\frac{\iota p_k (q_i - q_j)}{\hbar}} = \frac{1}{A} \frac{2\pi\hbar}{\delta_q} \delta_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\delta_q} \rightarrow A = 2\pi\hbar. \quad (3.34)$$

Logo,

$$\langle q_i | p_k \rangle = \frac{e^{\frac{\iota p_k q_i}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \quad (3.35)$$

A convergência para o contínuo de cada um dos espaços está condicionada aos dois parâmetros δ_q e δ_p , e ocorrerá quando $\delta_q, \delta_p \rightarrow 0$. Nesse caso, o somatório dado pela equação (3.25) converge para a integral da seguinte forma

$$\sum_{k=-\frac{\xi-1}{2}}^{\frac{\xi-1}{2}} e^{\frac{\iota p_k}{\hbar} (q_i - q_j)} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{\frac{\iota p}{\hbar} (q - q')} = 2\pi\hbar \delta(q - q'). \quad (3.36)$$

As outras aproximações convergem de forma semelhante no limite indicado. É interessante perceber que a convergência de cada um dos espaços está condicionada à convergência do outro. Seria impossível, nessa descrição, ter um espaço contínuo nas posições e discreto nos momentos.

Para estados arbitrários, é possível conectar as funções nos espaços de posição e momento a partir da igualdade

$$\langle p_j | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sum_k \delta_q \Psi(q_k) e^{\frac{\iota p_j q_k}{\hbar}}. \quad (3.37)$$

Os limites do somatório, sempre que omitidos, deverão ser tomados de $-\frac{\xi-1}{2}$ a $\frac{\xi-1}{2}$.

3.4 Estado Gaussiano

Um caso de bastante interesse para o trabalho é o caso de uma distribuição Gaussiana:

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \Psi(q - \bar{q}) |q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \Psi(q) |q + \bar{q}\rangle, \quad \Psi(q) = \frac{e^{-\frac{q^2}{4\Delta_q^2}} e^{i\bar{p}q/\hbar}}{(2\pi\Delta_q^2)^{1/4}}, \quad (3.38)$$

para o qual se mostra que

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \bar{q}, & \Delta q &= \sqrt{\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2} = \Delta_q, \\ \langle P \rangle &= \bar{p}, & \Delta p &= \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2} = \frac{\hbar}{2\Delta_q}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

No formalismo discretizado, introduzindo-se $\Delta = \Delta_q / \delta_q$, $q_k = \delta_q k$ e $\bar{q} = \delta_q \bar{k}$, a Eq. (3.38) toma a forma

$$|\psi\rangle = \sum_k \Psi_{k-\bar{k}} |k\rangle = \sum_k \Psi_k |k + \bar{k}\rangle, \quad \Psi_k = \frac{e^{-\frac{k^2}{4\Delta^2}} e^{ik(\delta_q \bar{p}/\hbar)}}{\sqrt{N}}, \quad (3.40)$$

sendo N a constante de normalização, que pode ser determinada impondo-se $\langle \psi | \psi \rangle = \sum_k \delta_q |\Psi|^2 = 1$. Tem-se, a partir disso,

$$N = \sum_k e^{-\frac{k^2}{2\Delta^2}}. \quad (3.41)$$

A fim de simplificar parte dos cálculos e diminuir o custo computacional, a normalização foi aproximada por

$$N \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2\Delta^2}} = \theta(\Delta), \quad \theta(\Delta) \equiv \vartheta_3\left(0, e^{-\frac{1}{2\Delta^2}}\right), \quad (3.42)$$

onde $\vartheta_3(z, q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2kiz}$, com $z \in \mathbb{C}$, denota a função theta de Jacobi. A aproximação será tão boa quanto forem os termos somados à série. Somando-se 500 termos, o erro percentual cometido é da ordem de 10^{-15} para $\Delta = 5$ e 10^{-7} para $\Delta = 40$ (avaliações numéricas conduzidas no Mathematica). É possível verificar também por avaliações numéricas diretas (conduzidas no Mathematica) que a função $\theta(\Delta)$ pode ser aproximada analiticamente por

$$\theta(\Delta) \cong \begin{cases} \theta_0(\Delta) \equiv 1 + 2\left(e^{-\frac{1}{2\Delta^2}} + e^{-\frac{4}{2\Delta^2}} + e^{-\frac{9}{2\Delta^2}}\right) & \text{se } 0 \leq \Delta < 1, \\ \theta_1(\Delta) \equiv \sqrt{2\pi\Delta^2} & \text{se } \Delta > 1. \end{cases} \quad (3.43)$$

A primeira fórmula nasce da expansão em série de Taylor de $\theta(\Delta)$ até segunda ordem de Δ em torno de $\Delta = 0$. A segunda vem da observação, para $\Delta > 0$, que

$$\begin{aligned} \frac{\theta(\Delta)}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2}{2\Delta^2}}}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \Delta k \frac{e^{-\frac{k^2}{2\Delta^2}}}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \stackrel{(k=n\nu)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-1}^1 \Delta \nu \frac{e^{-\frac{\nu^2}{2(\Delta/n)^2}}}{\sqrt{2\pi(\Delta/n)^2}} = \int_{-1}^1 d\nu \delta(\nu) = 1. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Verifica-se que a aproximação (3.43) nunca implica um erro maior que 0,0271% em relação a $\vartheta_3(0, e^{-\frac{1}{2\Delta^2}})$ para todo $\Delta \geq 0$, sendo que este erro é cometido na interface $\Delta = 1$ e pode ser reduzido adicionando-se outros termos na expansão em série de Taylor de $\theta(\Delta)$. Pode-se ainda, compor analiticamente os domínios de Δ através da soma convexa

$$\theta(\Delta) \cong (1 - f_\Delta) \theta_0(\Delta) + f_\Delta \theta_1(\Delta), \quad f_\Delta \equiv \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\arctan[\gamma(\Delta - 1)]}{\pi} \right\}, \quad (3.45)$$

a qual, obviamente, será também uma aproximação excelente.

Alguns cálculos foram conduzidos a fim de se avaliar a formulação discreta. Valendo-se novamente das variáveis Δ_q e q_k e desprezando-se os termos a partir da segunda ordem em δ_q nas expansões das exponenciais, tem-se que a derivada discreta de uma gaussiana é

$$\begin{aligned} -\iota\hbar\Psi'_k &= -\frac{\iota\hbar}{\delta_q} \left[\exp\left(-\frac{(q_k + \delta_q)^2}{4\Delta_q^2} + \iota\frac{\bar{p}}{\hbar}(q_k + \delta_q)\right) - \exp\left(-\frac{q_k^2}{4\Delta_q^2} + \iota\frac{\bar{p}}{\hbar}q_k\right) \right] \\ &= -\frac{\iota\hbar}{\delta_q} \left[\exp\left(-\frac{2q_k\delta_q}{4\Delta_q^2} + i\delta_q\frac{\bar{p}}{\hbar}\right) \right] \Psi_k = -\frac{\iota\hbar}{\delta_q} \left[\frac{i\delta_q\bar{p}}{\hbar} - \frac{2q_k\delta_q}{4\Delta_q^2} \right] \Psi_k, \end{aligned} \quad (3.46)$$

e a segunda derivada, por sua vez,

$$\begin{aligned} -\hbar^2\Psi''_k &= -\frac{\iota\hbar}{\delta_q} \left[\left(\bar{p} + \iota\hbar\frac{2q_k + \delta_q}{4\Delta_q^2} \right) \exp\left(-\frac{(q_k + \delta_q)^2}{4\Delta_q^2} + \iota\frac{\bar{p}}{\hbar}(q_k + \delta_q)\right) - \left(\bar{p} + \iota\hbar\frac{2q_k}{4\Delta_q^2} \right) \Psi_k \right] \\ &= -\frac{\iota\hbar}{\delta_q} \left[\left(\bar{p} + \iota\hbar\frac{2q_k + \delta_q}{4\Delta_q^2} \right) \left(1 - \frac{2q_k\delta_q}{4\Delta_q^2} + i\delta_q\frac{\bar{p}}{\hbar} \right) - \left(\bar{p} + \iota\hbar\frac{2q_k}{4\Delta_q^2} \right) \right] \Psi_k \\ &= \left[\frac{\hbar^2}{2\Delta_q^2} + \left(\bar{p} + \iota\hbar\frac{2q_k + \delta_q}{4\Delta_q^2} \right)^2 \right] \Psi_k. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Com essas quantidades em mãos, calcula-se as incertezas na posição e no momento:

$$\langle Q \rangle = \sum_k \delta_q \Psi_k^* q_k \Psi_k = \bar{q}^2, \quad (3.48)$$

$$\langle Q^2 \rangle = \sum_k \delta_q \Psi_k^* q_k^2 \Psi_k = \bar{q}^2 + \sum_k \delta_q q_k^2 |\Psi_k|^2, \quad (3.49)$$

$$\langle P \rangle = \sum_k \delta_q \Psi_k^* \Psi'_k = -\iota\hbar \sum_k \delta_q \left(\frac{i\bar{p}}{\hbar} - \frac{2q_k}{4\Delta_q^2} \right) |\Psi_k|^2 = \bar{p}, \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \langle P^2 \rangle &= \sum_k \delta_q \Psi_k^* \Psi''_k = -\hbar^2 \sum_k \delta_q \left[\frac{\hbar^2}{2\Delta_q^2} + \left(\bar{p} + \iota\hbar\frac{2q_k + \delta_q}{4\Delta_q^2} \right)^2 \right] |\Psi_k|^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2\Delta_q^2} + \bar{p}^2 - \frac{\hbar^2}{4\Delta_q^4} \sum_k \delta_q q_k^2 |\Psi_k|^2, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\Delta_Q^2 = \langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2 = \sum_k \delta_q q_k^2 |\Psi_k|^2, \quad (3.52)$$

$$\Delta_P^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2\Delta_q^2} - \frac{\hbar^2}{4\Delta_q^4} \sum_k \delta_q q_k^2 |\Psi_k|^2 = \frac{\hbar^2}{2\Delta_q^2} - \frac{\hbar^2 \Delta_Q^2}{4\Delta_q^4}; \quad (3.53)$$

e o produto das incertezas

$$\Delta_Q \Delta_P = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{2\Delta_Q^2}{\Delta_q^2} - \frac{\Delta_Q^4}{\Delta_q^4} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.54)$$

Diferentemente do caso contínuo, a incerteza na posição não será sempre a largura da gaussiana, denotada aqui Δ_q . Como pode ser visto na Figura 2, para larguras menores que a resolução δ_q do espaço, a incerteza associada vai rapidamente a zero, indicando que o formalismo é insensível a incertezas suficientemente pequenas. Esse mesmo resultado pode ser visto reescrevendo Δ_Q na forma

$$\frac{\Delta_Q}{\delta_q} = \frac{2\Delta^2}{\theta(\Delta)} \sum_k \frac{k^2}{2\Delta^2} e^{-\frac{k^2}{2\Delta^2}} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left[-\frac{d}{d\lambda} \theta \left(\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda}} \right) \right] \quad (3.55)$$

e considerando a aproximação (3.43):

$$\frac{\Delta_Q}{\delta_q} \approx 2 \frac{e^{-\frac{1}{2\Delta^2}} + 4e^{-\frac{4}{2\Delta^2}} + 9e^{-\frac{9}{2\Delta^2}}}{1 + 2 \left(e^{-\frac{1}{2\Delta^2}} + e^{-\frac{4}{2\Delta^2}} + e^{-\frac{9}{2\Delta^2}} \right)}, \quad 0 < \Delta < 1. \quad (3.56)$$

Percebe-se da expressão que, para Δ pequeno, a incerteza vai de fato a zero.

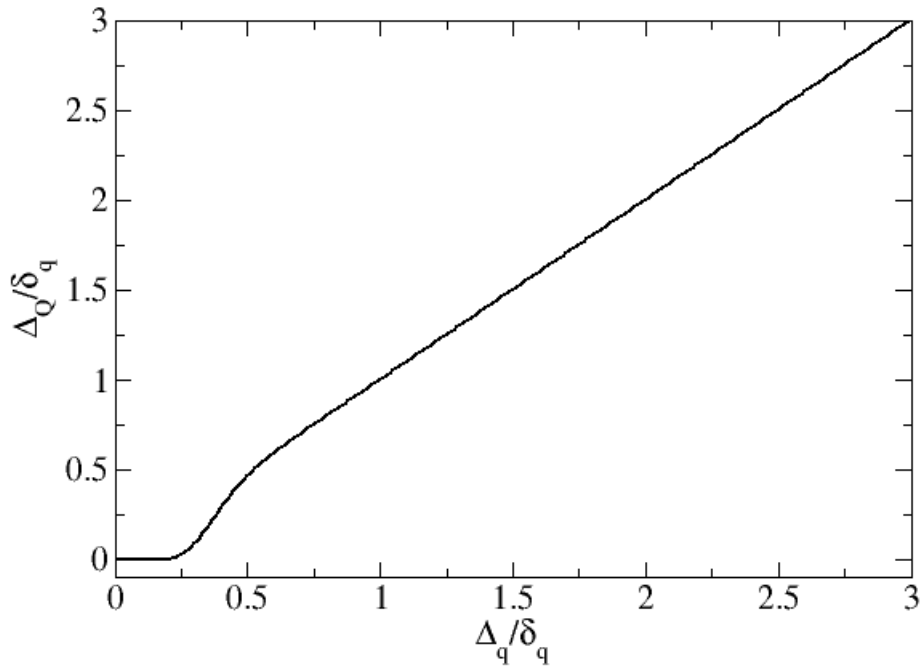


Figura 2 – Incerteza na posição de um estado gaussiano no formalismo discreto.

Esse efeito impõe uma limitação à aplicação dessa teoria. Observando-se o produto das incertezas $\Delta_Q \Delta_P$ na figura 3, vê-se que no regime $\Delta < 1$ o princípio da incerteza é violado. Isso porque a incerteza em Q vai extremamente rápido a 0, não sendo acompanhada por um crescimento igualmente rápido na incerteza do momento. Então, por mais que existam soluções analíticas nesse regime, tais soluções não são fisicamente válidas. Dito isso, o trabalho que se segue vai se limitar sempre aos regimes fisicamente possíveis.

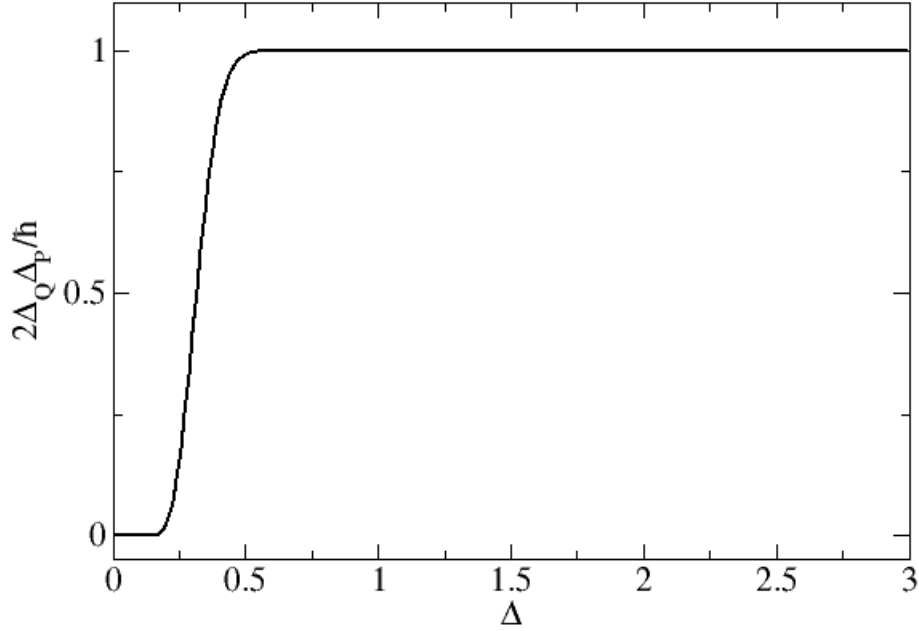


Figura 3 – Produto das incertezas Δ_Q e Δ_P para um estado gaussiano no formalismo discretizado.

É interessante verificar também a capacidade desse formalismo no espaço dos momentos. Nesse espaço, a gaussiana é calculada com uso da igualdade (3.37), a partir da qual se tem

$$\langle p_j | \psi \rangle = \frac{\delta_q}{\sqrt{2N\pi\hbar}} \sum_k e^{-\frac{q_k^2}{4\Delta_q^2}} e^{iq_k(p_j - \bar{p})/\hbar} = \left(\frac{\delta_q}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_3 \left(\frac{\delta_q(p_j - \bar{p})}{2\hbar}, e^{-\frac{\delta_q^2}{4\Delta_q^2}} \right)}{\left[\vartheta_3 \left(0, e^{-\frac{\delta_q^2}{4\Delta_q^2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.57)$$

também aproximando-se a soma em k por uma soma infinita. Essa aproximação é importante para que sejam válidas algumas propriedades [31] da função theta de Jacobi que permitem uma melhor compreensão de (3.57), tais como a periodicidade,

$$\vartheta_3 \left(\frac{\delta_q}{2\hbar} \left(p_j - \bar{p} + \frac{2\hbar}{\delta_q} \pi \right), e^{-\frac{\delta_q^2}{4\Delta_q^2}} \right) = \vartheta_3 \left(\frac{\delta_q(p_j - \bar{p})}{2\hbar}, e^{-\frac{\delta_q^2}{4\Delta_q^2}} \right), \quad (3.58)$$

e a seguinte forma de se reescrever $\vartheta_3(z, q)$:

$$\vartheta_3(z, q) = \frac{\sqrt[4]{-1}\sqrt{\pi}}{\sqrt{-i\ln q}} e^{\frac{z^2}{\ln q}} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{k^2 \pi^2}{\ln q}} \cosh \frac{2k\pi z}{\ln q} \right). \quad (3.59)$$

Assim, é possível reescrever (3.57) como

$$\begin{aligned} \langle p_j | \psi \rangle &= \left(\frac{\delta_q}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2\Delta_q^2(p_j-\bar{p})^2}{\hbar^2}} \frac{1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{4k^2\pi^2\Delta_q^2}{\delta_q^2}} \cosh \frac{4k\pi(p_j-\bar{p})\Delta_q^2}{\hbar\delta_q}}{\left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{4k^2\pi^2\Delta_q^2}{\delta_q^2}} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \left(\frac{\delta_q}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2\Delta_q^2(p_j-\bar{p})^2}{\hbar^2}} \frac{\left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{4k^2\pi^2\Delta_q^2}{\delta_q^2}} \cosh \frac{4k\pi(p_j-\bar{p})\Delta_q^2}{\hbar\delta_q} \right)}{\theta^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta_q}{2\pi\Delta_q} \right)}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde se vê a relação direta com uma gaussiana de centro \bar{p} e variância $\frac{\hbar}{\sqrt{2}\Delta_q}$. Para $j \in [-n, n]$, a expressão encontrada para $\langle p_j | \psi \rangle$ se aproxima bastante bem de uma gaussiana.

3.5 Medida de Irrealidade

A partir da discretização dos espaços de momento e posição, é possível definir o mapa Φ dado por (2.38) com os operadores desses espaços. O cômputo dessa grandeza no espaço das posições se dá por

$$\Phi_Q(\rho) = \sum_k \Pi_k \rho \Pi_k, \quad (3.61)$$

com $\Pi_k = \delta_q |q_k\rangle \langle q_k|$ e $k \in [-\frac{\xi-1}{2}, \frac{\xi-1}{2}]$.

Assim definido, e para $\delta_q > 0$ e $|\psi\rangle$ arbitrário, o mapa satisfaz as propriedades esperadas:

$$\text{Tr } \Phi_Q(\rho) = \text{Tr } \rho, \quad (3.62a)$$

$$\Phi_Q^\dagger(\rho) = \Phi_Q(\rho), \quad (3.62b)$$

$$\langle \psi | \Phi_Q(\rho) | \psi \rangle \geq 0. \quad (3.62c)$$

A definição de elemento de realidade também se mantém a mesma. Dado um estado de mistura de autoestados do operador Q , $\rho = \sum_k p_k \Pi_k$, este será real:

$$\Phi_Q(\rho) = \sum_k \Pi_k \left(\sum_j p_j \Pi_j \right) \Pi_k \quad (3.63)$$

$$= \sum_k \delta_q |q_k\rangle \sum_j \delta_q^2 p_j \frac{\delta_{k,j}}{\delta_q} \frac{\delta_{j,k}}{\delta_q} \langle q_k| \quad (3.64)$$

$$= \sum_k \delta_q |q_k\rangle \langle q_k| p_k = \rho. \quad (3.65)$$

Além disso, para o formalismo discreto, medições consecutivas também preservam a realidade pré-existente

$$\Phi_{Q^2}(\rho) = \Phi_Q(\Phi_Q(\rho)) \quad (3.66)$$

$$= \sum_k \Pi_k \left(\sum_j \Pi_j \rho \Pi_j \right) \Pi_k \quad (3.67)$$

$$= \sum_k \delta_q |q_k\rangle \sum_j \delta_q^2 \langle q_j | \rho | q_j \rangle \frac{\delta_{k,j}}{\delta_q} \frac{\delta_{j,k}}{\delta_q} \langle q_k | \quad (3.68)$$

$$= \sum_k \Pi_k \rho \Pi_k = \Phi_Q(\rho). \quad (3.69)$$

A operação de traço de um operador também deve ser adaptada para que se mantenha a consistência dimensional da teoria. Toma-se então essa operação como

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_k \delta_q \langle q_k | \rho | q_k \rangle, \quad (3.70)$$

que permite calcular a entropia de von Neumann como

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = -\sum_k \delta_q \langle q_k | \rho \ln \rho | q_k \rangle. \quad (3.71)$$

Por fim, o quantificador de irrealidade mantém-se como definido anteriormente, levando-se em conta as alterações no traço e, conseqüentemente, na entropia assim como as alterações do mapa Φ produzidas pela definição dos operadores de posição:

$$\mathfrak{I}(Q|\rho) = S(\Phi_Q(\rho)) - S(\rho). \quad (3.72)$$

Irrealidade de Estados Puros

Para estados puros desse espaço de posições discretizado, a entropia de von Neumann fica

$$\begin{aligned} -\sum_i \langle i | \rho \ln \rho | i \rangle &= -\sum_i \langle i | \left(\rho(\rho - 1) - \frac{\rho(\rho - 1)^2}{2} + \frac{\rho(\rho - 1)^3}{3} - \dots \right) | i \rangle \\ &= -\sum_i \langle i | \left(\rho - \rho + \frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{3} - \frac{\rho}{3} - \dots \right) | i \rangle = 0 \end{aligned}$$

sendo esse resultado uma consequência da propriedade de idempotência dos estados puros: $\rho^2 = \rho$.

Irrealidade de um Estado Uniforme

Considere um pacote Gaussiano de incerteza mínima

$$|\psi\rangle = \int_{-q_i}^{q_f} dq \psi(q) |q\rangle, \quad \psi(q) = \frac{e^{i\phi(q)}}{\sqrt{\Delta_q}}, \quad (3.73)$$

onde $\Delta_q \equiv q_f - q_i$. Usando $q_k = k\delta_q$, escrevemos sua versão discretizada na forma

$$|\psi\rangle = \sum_{k=k_i}^{k_f} \psi_k |k\rangle, \quad \psi_k \equiv \sqrt{\delta_q} \psi(q_k) = \frac{e^{i\phi_k}}{\sqrt{\Delta_q}}, \quad (3.74)$$

onde $\Delta \equiv \Delta_q/\delta_q$ e $\psi_k = \psi(q_k)$. Por cálculo direto mostra-se que em ambas as versões $\langle \psi | \psi \rangle = 1$. O estado com elemento de realidade para Q se escreve

$$\Phi_Q(\rho) = \sum_k \delta_q^2 |k\rangle \langle k| \rho |k\rangle \langle k| = \sum_k \delta_q^2 |\langle k | \psi \rangle|^2 |k\rangle \langle k| = \sum_k \delta_q |\psi_k|^2 |k\rangle \langle k| = \frac{1}{\Delta} \sum_k \delta_q |k\rangle \langle k|. \quad (3.75)$$

Via equação de autovalores $\Phi_Q(\rho)|k\rangle = \frac{1}{\Delta}|k\rangle$ o cálculo da entropia de von Neumann produz

$$\begin{aligned} S(\Phi_Q(\rho)) &= -\text{Tr}[\Phi_Q(\rho) \ln \Phi_Q(\rho)] = -\sum_k \delta_q \langle k | \Phi_Q(\rho) \ln \Phi_Q(\rho) | k \rangle \\ &= -\sum_k |\psi_k|^2 \ln |\psi_k|^2 = -\sum_{k=k_i}^{k_f} \frac{1}{\Delta} \ln \left(\frac{1}{\Delta} \right) \\ &= \ln \Delta. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Porque o estado do sistema é puro, ele é também idempotente, ou seja, $\rho^2 = \rho$ em qualquer uma de suas versões (contínua ou discretizada). Segue disto que $S(\rho) = 0$. Logo, a irrealidade do estado vale

$$\mathfrak{I}(Q|\rho) = S(\Phi_Q(\rho)) - S(\rho) = \ln \Delta. \quad (3.77)$$

Informalmente falando, vemos que, assim como a entropia, a irrealidade do estado está diretamente relacionada com a largura do mesmo.

Irrealidade de um Estado Gaussiano

O estado com elemento de realidade para Q é calculado como na seção anterior e resulta em $\Phi_Q(\rho) = \sum_k \delta_q |\psi_{k-\bar{k}}|^2 |k\rangle \langle k|$ com relação de autovalor $\Phi_Q(\rho)|k\rangle = |\psi_{k-\bar{k}}|^2 |k\rangle$. Juntamente com a identidade $N\sqrt{2\pi\Delta^2} = \theta(\Delta)$, isso nos habilita calcular a entropia

$$\begin{aligned} S(\Phi_Q(\rho)) &= -\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_{k-\bar{k}}|^2 \ln |\psi_{k-\bar{k}}|^2 = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_k|^2 \ln |\psi_k|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2}{2\Delta^2}}}{N\sqrt{2\pi\Delta^2}} \left[\frac{k^2}{2\Delta^2} + \ln \left(N\sqrt{2\pi\Delta^2} \right) \right] \\ &= \ln \theta(\Delta) + \frac{1}{\theta(\Delta)} \sum_k \frac{k^2}{2\Delta^2} e^{-\frac{k^2}{2\Delta^2}} \\ &= \ln \theta(\Delta) + \frac{1}{\theta(\Delta)} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left[-\frac{d}{d\lambda} \theta \left(\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.78)$$

A partir das fórmulas aproximadas (3.43) obtém-se

$$S(\Phi_Q(\rho)) \cong \begin{cases} \ln \theta_0(\Delta) + \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{e^{-\frac{1}{2\Delta^2}} + 4e^{-\frac{4}{2\Delta^2}} + 9e^{-\frac{9}{2\Delta^2}}}{\theta_0(\Delta)} \right] & \text{se } 0 \leq \Delta < 1, \\ \ln(\sqrt{2\pi e} \Delta) & \text{se } \Delta > 1. \end{cases} \quad (3.79)$$

A comparação desta fórmula aproximada com o resultado numérico exato produziu erros percentuais menores que 0,25% e $10^{-5}\%$ nos respectivos domínios $0 \leq \Delta < 1$ e $\Delta > 1$, o que atesta o considerável êxito desta abordagem. É digno de nota que a fórmula da entropia para o domínio $\Delta < 1$ está em pleno acordo com o reportado na Ref. [28] para a entropia contínua de uma distribuição Gaussiana.

Para um autoestado de posição $\varrho = \delta_q |\bar{k}\rangle \langle \bar{k}|$ temos que $S(\varrho) = 0$. Espera-se que o estado $\Phi_Q(\rho)$ tenda a ϱ , e portanto que $S(\Phi_Q(\rho)) \rightarrow 0$, quando $\psi_{k-\bar{k}}$ for uma distribuição suficientemente localizada. Uma análise numérica do resultado (3.79) mostra que $S(\Phi_Q(\rho)) < 3,73 \times 10^{-3}$ para $\Delta < 1/\sqrt{2\pi e}$, ou seja, $\Delta_q < \delta_q/\sqrt{2\pi e}$. Do ponto de vista do processo de discretização, é bastante razoável que um desvio quadrático médio como $\delta_q/\sqrt{2\pi e}$ seja considerado o de um estado puro efetivo (localização máxima), pois:

$$\begin{aligned} \Delta_q = \delta_q & \rightarrow \int_{-\delta_q/2}^{\delta_q/2} dq |\psi(q)|^2 = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \approx 0,383, \\ \Delta_q = \frac{\delta_q}{\sqrt{2\pi e}} & \rightarrow \int_{-\delta_q/2}^{\delta_q/2} dq |\psi(q)|^2 = \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi e}}{2}\right) \approx 0,961. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Aqui, erf denota a função erro. Claramente, no segundo caso a maior parte da densidade de probabilidade está localizada no intervalo δ_q , o que produz uma alusão mais apropriada à noção de autoestado de Q . No entanto esse regime se encontra em $\Delta < 1$, no qual o princípio de incerteza é violado para uma Gaussiana. A localização máxima permitida pela discretização ocorre, então, no caso $\Delta_q = \delta_q$.

Restringindo-se ao domínio fisicamente interessante de Δ , qual seja, $\Delta \geq 1$, somente a aproximação dada pela fórmula $S(\Phi_Q(\rho)) = \ln(\sqrt{2\pi e} \Delta)$ permanece válida, o que a elege, então, como uma aproximação simplificada conveniente para a entropia do estado Gaussiano. Finalmente, chegamos à irrealidade de Q para um estado Gaussiano de incerteza mínima:

$$\mathfrak{I}(Q|\rho) = \ln(\sqrt{2\pi e} \Delta). \quad (3.81)$$

Fica claro que o parâmetro de δ_q não é crucial para a definição da irrealidade, mas sim o quão deslocalizado é o pacote Gaussiano em relação a esta resolução. Em particular, em situações em que o interesse está na variação da irrealidade, teremos que

$$\mathfrak{I}(Q|\rho(t)) - \mathfrak{I}(Q|\rho(0)) = \ln \left[\frac{\Delta_q(t)}{\Delta_q(0)} \right], \quad (3.82)$$

fórmula que independe da resolução δ_q e vale, por exemplo, para os problemas de uma partícula livre ou de um oscilador harmônico com dissipação preparados em estado Gaussiano. Nesses casos a entropia e, conseqüentemente, a irrealidade serão também funções do tempo. Como no espaço dos momentos o pacote pode ser aproximado de forma

satisfatória por um estado Gaussiano, obtemos

$$\Delta\mathfrak{I}_Q + \Delta\mathfrak{I}_P = \ln \left[\frac{\Delta_q(t)\Delta_p(t)}{\Delta_q(0)\Delta_p(0)} \right] = \ln \left[\frac{\Delta_q(t)\Delta_p(t)}{\hbar/2} \right] \geq 0. \quad (3.83)$$

3.6 Complementaridade de elementos de realidade

Nesta seção, utilizaremos $\Delta_q \equiv \Delta q/\delta_q$ e $\Delta_p \equiv \Delta p/\delta_p$ para as incertezas adimensionais e não mais para as larguras dos pacotes de onda em cada espaço, como na seção anterior. Δq e Δp permanecem com a conotação de desvios quadráticos médios (e, portanto, representam as larguras dos pacotes Gaussianos da seção anterior) e $\delta_{q,p}$ continuam como resoluções de cada espaço.

Uma lição importante das seções anteriores é que a irrealidade na posição Q da partícula para uma dada preparação $\rho_{[\Delta_q, \Delta_p]}$ é uma função monotonamente crescente de Δ_q , e se anula somente se $\Delta_q = 0$. Assim, introduzindo a notação $\mathfrak{I}_Q(\Delta_q) \equiv \mathfrak{I}(Q|\rho_{[\Delta_q, \Delta_p]})$ podemos afirmar que $\Delta'_q > \Delta_q$ implica que $\mathfrak{I}_Q(\Delta'_q) > \mathfrak{I}_Q(\Delta_q)$. A situação não é diferente para o momento conjugado. Vamos admitir daqui pra frente que este cenário é geral. Agora, observe-se que

$$\Delta_p = \frac{\Delta p}{\delta_p} \geq \frac{1}{\delta_p} \frac{\hbar/2}{\Delta_q} = \left(\frac{\hbar/2}{\delta_q \delta_p} \right) \frac{1}{\Delta_q}, \quad (3.84)$$

relação que, com $\bar{\xi} \equiv \frac{\hbar/2}{\delta_q \delta_p}$, implica que $\Delta_q \Delta_p \geq \bar{\xi}$. Pela monotonicidade da irrealidade segue então que

$$\mathfrak{I}_Q(\Delta_q) + \mathfrak{I}_P(\Delta_p) \geq \mathfrak{I}_Q(\Delta_q) + \mathfrak{I}_P(\bar{\xi}/\Delta_q), \quad (3.85)$$

com a igualdade válida para o estado de mínima incerteza. Uma vez que $\mathfrak{I}_{Q,P}$ só se anulam se $\Delta_{q,p} = 0$ e não é razoável considerar uma discretização tal que $\bar{\xi} \rightarrow 0$, fica claro que o lado direito da desigualdade implica numa quota inferior não-nula para a soma das irrealidades, resultado que chamaremos de *complementaridade de elementos de realidade de observáveis incompatíveis*. É claro que este resultado deve valer apenas para estados puros, pois, por exemplo, se $\rho = \mathbb{1}/d$, sendo d a dimensão do espaço de Hilbert, então todos os observáveis, incompatíveis ou não, terão realidade simultânea. Por outro lado, para a classe de estados puros, tal resultado vale para toda discretização induzida pelas resoluções $\delta_{q,p}$.

Se demandarmos que $\bar{\xi} > 1$ dentro da teoria discretizada—o que corresponde a uma exigência física *natural*¹ de que o produto de resoluções $\delta_q \delta_p$ seja capaz de resolver o

¹ A proposta de que $\bar{\xi} > 1$ implica que $\delta_q \delta_p < \hbar/2$, o que aparentemente viola o princípio de incerteza de Heisenberg. Porém, aqui devemos invocar a noção de Bohr sobre a *classicalidade* inerente ao aparatos de medição, para os quais esperamos resoluções idealmente baixas em medições de quaisquer observáveis, sejam elas compatíveis ou não. Diferentemente da conotação associada ao princípio de incerteza $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$, em que ambos Δq e Δp dependem do estado quântico, δ_q e δ_p são resoluções associadas a aparelhos distintos, os quais são empregados em diferentes realizações dentro do mesmo ensemble. Logo, não devem, *a priori*, obediência ao princípio de incerteza.

quantum de ação $\hbar/2$ —então teremos uma quota inferior ainda mais alta:

$$\mathfrak{I}_Q(\Delta_q) + \mathfrak{I}_P(\Delta_p) \geq \mathfrak{I}_Q(\Delta_q) + \mathfrak{I}_P(1/\Delta_q), \quad (3.86)$$

desigualdade esta que define, portanto, a relação de *complementaridade* para a teoria discretizada com $\bar{\xi} > 1$. Voltemos ao resultado (3.81) para o caso do pacote Gaussiano. Esta fórmula é boa sempre que $\Delta_{q,p} > 1$, isto é, $\Delta_q > 1$ e $\Delta_p = \bar{\xi}/\Delta_q > 1$. Estas desigualdades implicam que $1 < \Delta_q < \bar{\xi}$. Fica claro aqui que não podemos usar a fórmula (3.81) para descrever ambos \mathfrak{I}_Q e \mathfrak{I}_P se $\bar{\xi} < 1$. Para esses casos, precisaríamos usar a fórmula completa (3.79), que, apesar de ser uma solução matemática válida a priori, recai no regime fisicamente inválido no qual o princípio de incerteza é violado. Por conseguinte, continuamos nos restringindo a $\bar{\xi} > 1$, em qual caso obtemos

$$\mathfrak{I}_Q(\Delta_q) + \mathfrak{I}_P(\Delta_p) = \ln(2\pi e \Delta_q \Delta_p) = \ln\left(2\pi e \bar{\xi} \frac{\Delta_q \Delta_p}{\hbar/2}\right) > \ln(2\pi e). \quad (3.87)$$

Esse mesmo resultado já é encontrado na literatura para o conceito de entropia [32, 33, 34, 35], e pode mesmo ser obtido a partir da desigualdade (2.31) e da forma discreta da onda plana (3.35). Diferentemente do que é feito aqui, a derivação dessas desigualdades não se baseia numa discretização completa do espaço, mas somente na hipótese de que as medidas de posição e momento têm precisão finita também dada por elementos do tipo $\delta_{q,p}$, ou seja, de que as distribuições de probabilidade associadas às medidas de momento e posição de uma partícula num estado puro são

$$p_k = \int_{k\delta_p}^{(k+1)\delta_p} dp |\Phi(p)|^2, \quad q_k = \int_{k\delta_q}^{(k+1)\delta_q} dq |\Psi(q)|^2. \quad (3.88)$$

Da mesma forma que no resultado obtido nesse trabalho, os resultados obtidos para a desigualdade entrópica dependem explicitamente das resoluções δ_q e δ_p do aparato medidor e divergem no caso em que $\delta_{q,p} \rightarrow 0$.

Como remarcado por outros autores, no caso em que $\bar{\xi} < 1$, tem-se que o lado direito da desigualdade é negativo, resultado que se mostra desinteressante visto que as entropias assumem somente valores não negativos. Porém, como mostrado aqui, esse regime não é fisicamente válido e não se pode concluir nada a partir dele, sendo a quota delimitada pela desigualdade sempre positiva. Tal conclusão é resultado da discretização completa do espaço, não sendo possível obtê-la diretamente da consideração descrita por (3.88).

4 Modelo Dinâmico Efetivo de Medições de Posição

4.1 Hamiltonianos Dependentes do Tempo

Ter a posição de uma partícula como única variável da força que age sobre ela é uma posição compartilhada por diversos filósofos da física [36]. Acontece, no entanto, de se postular algumas dessas forças como dependentes do tempo ou da velocidade, como é o caso de forças dissipativas exercidas sobre uma partícula que se move em um meio viscoso. A ideia que reside por trás dessa dependência temporal é que ela pode ser eliminada caso o sistema de interesse seja aumentado o suficiente para que se incluam nele outros corpos, cujas forças sobre eles atuantes dependam unicamente de suas posições. Uma vez aumentado, seria possível reescrever a dinâmica desse sistema de forma que as forças sobre ele não mais dependessem do tempo.

Como nem sempre é possível uma descrição completa de dado sistema, a dependência temporal na força - ou no potencial - permite uma análise efetiva, geralmente mais simples que considerar todos os corpos responsáveis pela dinâmica da entidade de interesse. Evidentemente, ao se excluir esses corpos, perde-se toda e qualquer informação sobre o ambiente como um todo e o resultado é um sistema não conservativo.

Além da perda de informação inerente à simplificação, sua introdução acarreta alguns impasses teóricos às formulações Lagrangianas e Hamiltonianas na mecânica clássica [37, 38]. No caso de se adicionar dissipação ao sistema por meio de uma força efetiva, a equação de movimento é escrita

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = f_d, \quad (4.1)$$

sendo L a Lagrangiana do sistema, que é equivalente a escrever

$$\int_0^{t_b} (\delta L + f_d \delta x) dt = 0. \quad (4.2)$$

Essa forma não permite escrever o princípio de mínima ação por meio de uma única Lagrangiana, $\int_0^{t_b} \delta L dt = 0$, sendo este ausente em sistemas dissipativos. Existem esforços ainda recentes de se recuperar tal princípio nessas condições [38]. Quanticamente, a tentativa de se desenvolver um modelo efetivo tem gerado ainda mais discussões [39, 40, 41, 42, 43, 44]. Embora não seja o objetivo do trabalho discorrer sobre tais dificuldades, é importante ressaltá-las para que fique claro que o modelo proposto pode não ser amplamente aceito.

Um dos primeiros esforços em se adicionar dissipação a sistemas quânticos foi realizado por Caldirola [45] e independentemente por Kanai [46], e consistiu em, a partir da quantização canônica, obter o Hamiltoniano de um oscilador harmônico amortecido:

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} e^{-2\lambda t} + \frac{1}{2} e^{2\lambda t} k Q^2, \quad (4.3)$$

sendo m a massa da partícula, k um parâmetro do potencial e λ o parâmetro de amortecimento do sistema. As primeiras críticas se deram a respeito de uma suposta violação do princípio de incerteza pois, em tempos muito longos, a evolução promovida por (4.3) implicaria comutação entre a posição e o momento *mecânico* do sistema [39, 47]. As suspeitas de causarem essa violação são a impossibilidade em se aplicar a quantização canônica a esse tipo de sistema [39, 46] ou ainda a não equivalência entre os momentos mecânico e canônico [41, 43, 48].

Há ainda problemas quanto à interpretação da evolução dada por (4.3), com afirmações de que o que de fato está sendo representado é um oscilador com massa crescente no tempo, e não uma dissipação efetiva [43, 49], e que esses modelos não seriam equivalentes em sua versão quântica apesar de o serem classicamente. Mesmo com todas essas questões, esse modelo vem sendo usado frequentemente e permite resultados muitas vezes interessantes em diversas áreas cujos fenômenos possam ser tratados de maneira fenomenológica, como na química [50, 51], modelos de interferômetros para detecção de ondas gravitacionais [52] e nanotecnologia [53].

Ocorre que outros modelos amplamente aceitos também não apresentam equivalência entre os momentos canônico e mecânico, como o de uma partícula em um campo eletromagnético. Trabalhos recentes mostram ainda que o Hamiltoniano (4.3) pode ser derivado a partir do formalismo tradicional de um sistema mais reservatório [54, 55], levantando novamente a questão sobre sua validade.

Colocados os possíveis impasses, o trabalho que segue pretende pensar uma descrição de um processo de medição em que as inúmeras variáveis que compõem tal processo sejam incluídas em uma dependência temporal por meio desse modelo efetivo desenvolvido por Kanai e Caldirola.

4.2 Análise Clássica

A Hamiltoniana de uma partícula de massa m_0 em um meio dissipativo pode ser escrita como

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + V(q, t). \quad (4.4)$$

Onde a função $m(t) = m_0 f(t)$ é o produto da massa m_0 e da função $f(t)$, responsável por implementar a dissipação do sistema. Pode-se imaginar, à primeira vista, tratar-se de um

corpo de massa dependente do tempo sujeito a um potencial dependente do tempo. Essa interpretação, no entanto, além de muitas vezes carecer de sentido físico, implica uma energia cinética da forma $m(t)v^2(t)/2$, que se mostrou incondizente com o modelo físico de uma partícula cuja energia cinética é dissipada por meio da interação com o ambiente. A interpretação adotada é, então, a de um modelo efetivo com energia cinética dada por $m_0v^2/2$, em que a função $f(t)$ presente no Hamiltoniano visa implementar, de forma *ad hoc*, a influencia externa capaz de drenar energia do sistema como discutido anteriormente. É conveniente escrevermos as equações de Hamilton na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \nabla H(\mathbf{x}, t), \quad (4.5)$$

onde

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla \equiv \begin{pmatrix} \partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Em teoria de sistemas dinâmicos, \mathbf{J} é conhecida como *matriz simplética*. Ela nos permite escrever as equações de Hamilton na forma compacta (4.5). É fácil ver que o sistema de equações (4.5) fornece as equações de Hamilton do movimento:

$$\dot{q} = \partial_p H = \frac{p}{m(t)}, \quad (4.7a)$$

$$\dot{p} = -\partial_q H = -\partial_q V(q, t). \quad (4.7b)$$

Isolando p na Eq. (4.7a), tomando sua derivada temporal e utilizando a Eq. (4.7b), podemos mostrar que $m(t)\ddot{q} + \dot{m}(t)\dot{q} + \partial_q V = 0$, a qual pode ser reescrita na forma

$$\ddot{q} + \Lambda(t)\dot{q} + \gamma(t)\partial_q V(q, t) = 0 \quad (4.8)$$

se introduzirmos as funções $\Lambda(t) \equiv \frac{d}{dt} \ln m(t)$ e $\gamma(t) \equiv 1/m(t)$. Note-se que se $\Lambda(t) > 0$, esta função fará o papel de parâmetro de amortecimento do sistema, o que ocorre quando a partícula tem um incremento positivo em sua massa.

Para o caso particular em que $V(q, t) = \frac{1}{2}k(t)q^2$, com $k(t) = k_0e^{2\lambda t}$ e $m(t) = m_0e^{2\lambda t}$, recupera-se a equação de movimento para o oscilador harmônico amortecido clássico:

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (4.9)$$

sendo $\omega_0^2 = k_0/m_0$ a frequência natural. As soluções para q e p são dadas por

$$q(\tau) = q_0 e^{-\tau} \left[\cosh(\zeta\tau) + \left(1 + \frac{p_0}{q_0 m \lambda} \right) \frac{\sinh(\zeta\tau)}{\zeta} \right], \quad (4.10a)$$

$$p(\tau) = p_0 e^{\tau} \left[\cosh(\zeta\tau) - \left(1 + \frac{k q_0}{p_0 \lambda} \right) \frac{\sinh(\zeta\tau)}{\zeta} \right], \quad (4.10b)$$

sendo q_0 e p_0 as os valores iniciais de posição e momento e tendo sido introduzidas as variáveis adimensionais

$$\tau = \lambda t, \quad \zeta = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\lambda^2}}. \quad (4.11)$$

O interesse principal em estudar esse modelo é analisar o estado do sistema quando $\tau \rightarrow \infty$ e, em particular, entender se o sistema atinge o repouso, o qual é definido aqui como $(q, v) \rightarrow (\bar{q}, 0)$, sendo \bar{q} um valor bem definido de posição. A velocidade é dada por $v(\tau) = \lambda dq(\tau)/d\tau = p(\tau)e^{-2\tau}/m_0$. Dentro da abordagem efetiva, a energia da partícula é a energia cinética $K = m_0 v^2/2$ (massa independente do tempo). Pode-se obter três diferentes regimes físicos a depender dos parâmetros do sistema, que serão trabalhados separadamente.

Em um deles, correspondente ao caso $\lambda < \omega_0$, tem-se que o parâmetro ζ é imaginário puro e as funções $\cosh(\zeta\tau)$ e $\sinh(\zeta\tau)/\zeta$ são consequentemente $\cos(|\zeta|\tau)$ e $\sin(|\zeta|\tau)/|\zeta|$. Nesse caso, haverá oscilação tanto da posição quanto do momento além do efeito de amortecimento desempenhado pela exponencial. No caso da posição, o amortecimento é responsável pelo decaimento exponencial enquanto que no momento ele é responsável por um crescimento exponencial.

No caso em que $\lambda > \omega_0$, o parâmetro ζ é real e limitado entre 0 e 1, ocorrendo $\zeta = 1$ no limite $\lambda \rightarrow \infty$. Tomando λ finito, percebe-se que, além de não haver oscilações, o amortecimento também será responsável por um decaimento exponencial na posição e um crescimento exponencial do momento da partícula. O comportamento da posição e do momento canônico podem ser observados nas Figuras 4a e 5a respectivamente.

Para $\zeta \rightarrow 0$ toma-se o limite das soluções dadas por (4.10), encontrando-se

$$q(\tau) = q_0 e^{-\tau} \left[1 + \left(1 + \frac{p_0}{q_0 m \lambda} \right) \tau \right], \quad (4.12)$$

$$p(\tau) = p_0 e^{\tau} \left[1 - \left(1 + \frac{k q_0}{p_0 \lambda} \right) \tau \right], \quad (4.13)$$

nas quais se verifica o mesmo comportamento qualitativo do caso anterior.

Tem-se ainda que a velocidade, dada por $v(\tau) = \frac{p(\tau)}{m_0} e^{-2\tau}$, também decairá exponencialmente em todos os três casos, podendo essa conclusão ser feita a partir de sua expressão em cada um dos casos:

$$v(\tau) = \frac{p_0}{m_0} e^{-\tau} \left[\cos(|\zeta|\tau) - \left(1 + \frac{k q_0}{p_0 \lambda} \right) \frac{\sin(|\zeta|\tau)}{|\zeta|} \right], \quad \lambda < \omega_0, \quad (4.14a)$$

$$v(\tau) = \frac{p_0}{m_0} e^{-\tau} \left[\cosh(\zeta\tau) - \left(1 + \frac{k q_0}{p_0 \lambda} \right) \frac{\sinh(\zeta\tau)}{\zeta} \right], \quad \lambda > \omega_0, \quad (4.14b)$$

$$v(\tau) = \frac{p_0}{m_0} e^{-\tau} \left[1 - \left(1 + \frac{k q_0}{p_0 \lambda} \right) \tau \right], \quad \lambda = \omega_0; \quad (4.14c)$$

e implicando que a evolução de um sistema por meio da Hamiltoniana (4.4) sempre atingirá o repouso no limite assintótico $\tau \rightarrow \infty$ mesmo que seu momento canônico $p(\tau)$ cresça indefinidamente. Além disso, nota-se que a energia cinética $K(\tau)$ também deve decair exponencialmente. Já a Hamiltoniana do sistema tem comportamento como apresentado na Figura 5b, oscilatório no caso $\lambda > \omega$ e exponencial nos outros dois regimes.

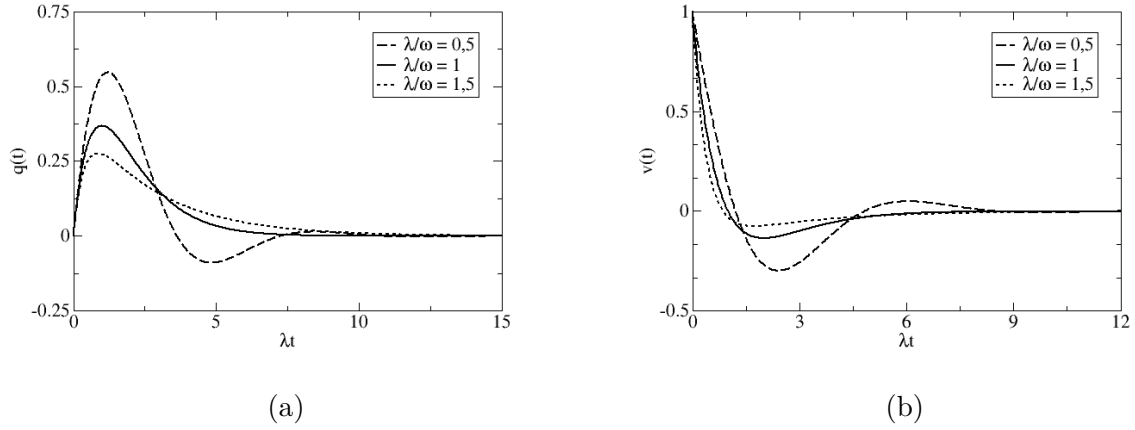


Figura 4 – (a) Posição e (b) velocidade de uma partícula sujeita a um potencial do tipo oscilador harmônico amortecido para $\frac{p_0}{m_0 q_0} = \frac{k_0 q_0}{p_0} = 1 s^{-1}$. Verifica-se da imagem que a partícula atingirá o repouso em cada um dos regimes apresentados dado que $(q_0, p_0) \rightarrow (0, 0)$ no limite $\tau \rightarrow \infty$.

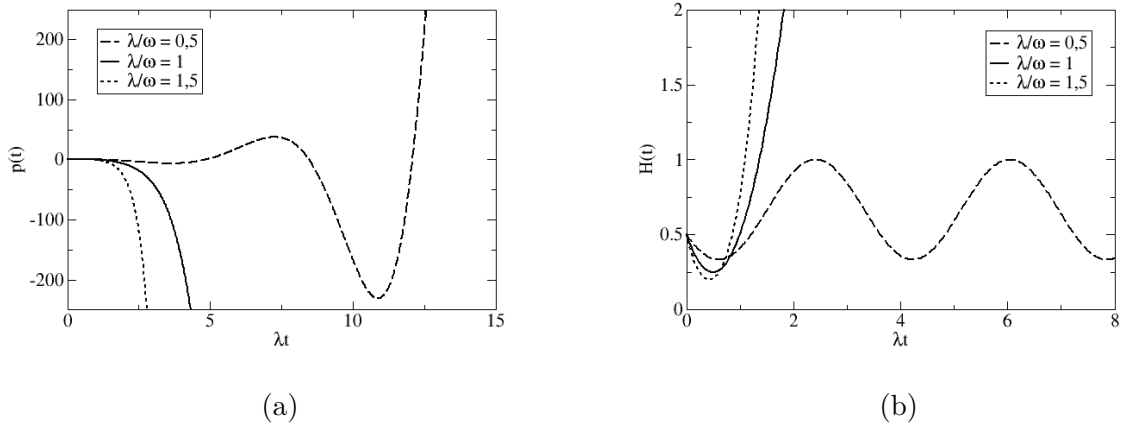


Figura 5 – (a) Momento canônico e (b) Hamiltoniana de uma partícula sujeita a um potencial do tipo oscilador harmônico amortecido para $\frac{p_0}{m_0 q_0} = \frac{k_0 q_0}{p_0} = 1 s^{-1}$.

Uma vez que o sistema tratado pelo modelo efetivo é apenas a partícula de massa m_0 , tem-se que sua energia é dada apenas pela energia cinética desta partícula. Todos os demais componentes da Hamiltoniana são ingredientes efetivos que fazem referência à interação com o resto do universo, não havendo qualquer tipo de energia associada a eles.

Classicamente é evidente a falta de conexão entre o momento canônico e a energia (cinética) do sistema embora ele ainda seja a entidade matemática responsável pela translação do sistema. Ao se estudar o equivalente quântico desse sistema essa questão será novamente colocada. Não seriam a posição, velocidade e energia cinética as grandezas mais adequadas ao se trabalhar com sistemas abertos?

4.3 Análise Quântica

Soluções para o Hamiltoniano (4.3) já são amplamente conhecidas na literatura, com diferentes métodos de obtenção como o da Ref. [56] (LR) [37, 42, 57, 58], integral de caminho [59, 60, 61] ou atuação do operador de evolução unitária [62, 63, 64]. Durante o desenvolvimento do trabalho foram usados o método LR, que se mostrou insatisfatório para atender aos objetivos desejados, e o operador de evolução, que foi o método utilizado na sequência.

O primeiro destes métodos se baseia em encontrar as soluções para a equação de Schrödinger a partir da combinação linear de autoestados de um invariante I , cuja forma é dada por [57, 65]

$$I = \frac{1}{2} \left[(\rho P - m \dot{\rho} Q)^2 + \left(\frac{Q}{\rho} \right)^2 \right], \quad (4.15)$$

sendo ρ um parâmetro dependente do tempo que satisfaz a equação

$$\ddot{\rho}(t) + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \dot{\rho} + \omega^2(t) \rho(t) = \frac{1}{m^3(t) \rho^2(t)}. \quad (4.16)$$

A solução fornecida pelo método é do tipo

$$|\psi_t\rangle = \sum_n C_n e^{i\alpha_n(t)} |\lambda_n, t\rangle, \quad (4.17)$$

sendo $|\lambda_n, t\rangle$ os autoestados do invariante I e com cada $\alpha_n(t)$ satisfazendo

$$\hbar \frac{d\alpha_n}{dt} = \langle \lambda_n, t | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \lambda_n, t \rangle. \quad (4.18)$$

Para o caso estudado, a função de onda de cada um desses estados é dada por

$$\Lambda_n(q, t) = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi \hbar} n! 2^n \rho} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \left(m \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\iota}{\rho^2} \right) q^2 \right] H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar \rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} q \right], \quad (4.19)$$

e

$$\alpha_n(t) = - \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t m^{-1} \rho^{-2} dt'. \quad (4.20)$$

O método se mostrou inviável pela dificuldade em se obter as soluções desejadas – Gaussianas deslocadas da origem do referencial – a partir da combinação linear de funções

do tipo (4.19), sendo possível somente trabalhar a partir dessas próprias funções ou de superposições destas. Essas funções, no entanto, não apresentam a dinâmica com a qual se desejava trabalhar (dinâmica que será desenvolvida logo em seguida), o que motivou a mudança do método de solução.

O segundo método, a partir do qual o trabalho foi realizado, consiste na atuação do operador de evolução U , dado em (2.2). Encontrar tal operador não é trivial, visto que o Hamiltoniano (4.3) não comuta em tempos distintos, o que torna o cômputo da exponencial da integral de um operador bastante sofisticado. No entanto, para um Hamiltoniano do tipo

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^m a_k(t) J_k, \quad (4.21)$$

no qual os operadores J_k formam uma álgebra de Lie fechada de dimensão m , o operador de evolução pode ter as seguintes formas [52, 64, 66]:

$$U = \exp \left(\sum_{k=1}^m b_k(t) J_k \right), \quad (4.22)$$

$$U = \prod_{k=1}^m \exp (c_k(t) J_k); \quad (4.23)$$

com $b_k(t)$ e $c_k(t)$ funções do tempo.

Tomando

$$J_+ = \frac{1}{2\hbar} Q^2; \quad (4.24a)$$

$$J_- = \frac{1}{2\hbar} P^2; \quad (4.24b)$$

$$J_0 = \frac{i}{4\hbar} (PQ + QP), \quad (4.24c)$$

podemos reescrever (4.3) na forma (4.21) para

$$a_+ = \hbar k(t); \quad (4.25a)$$

$$a_- = \frac{\hbar}{m(t)}; \quad (4.25b)$$

$$a_0 = 0. \quad (4.25c)$$

Como o conjunto formado pelos operadores (4.24a-4.24c) forma uma álgebra de Lie fechada, é possível encontrar um operador do tipo (4.23) com coeficientes

$$c_+(t) = m(t) \frac{\dot{u}(t)}{u(t)}; \quad (4.26a)$$

$$c_-(t) = -u(0)^2 \int_0^t \frac{dt'}{m(t')u(t')^2}; \quad (4.26b)$$

$$c_0(t) = -\ln \frac{u(t)^2}{u(0)^2}, \quad (4.26c)$$

sujeitos às condições de contorno $c_+(0) = c_-(0) = c_0(0) = 0$ e com $u(t)$ satisfazendo

$$\ddot{u} + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\dot{u} + \frac{k(t)}{m(t)}u = 0, \quad (4.27)$$

que, por conta das condições impostas aos parâmetros c_+ , c_- e c_0 , deve satisfazer $u(0) \neq 0$ e $u'(0) = 0$.

A função de onda de um estado evoluído será dada por

$$\Psi(q, t) = \langle q | \exp[\iota c_+(t) J_+] \exp[c_0(t) J_0] \exp[\iota c_-(t) J_-] | \psi_0 \rangle, \quad (4.28)$$

sendo $|\psi_0\rangle$ o estado inicial do sistema. O termo em J_+ , por ser uma função do operador Q , atua diretamente no autoestado de posição:

$$\Psi(q, t) = \exp\left[\frac{\iota c_+(t)}{2\hbar} q^2\right] \langle q | \exp[c_0(t) J_0] \exp[c_-(t) J_-] | \psi_0 \rangle. \quad (4.29)$$

Reescrevendo $QP + PQ = 2QP - \iota\hbar$ e percebendo que

$$\langle q | \exp\left[\frac{\iota c_0(t)}{2\hbar} (QP)\right] | \phi \rangle = \exp\left[\frac{c_0(t)}{2} q \partial_q\right] \langle q | \phi \rangle, \quad (4.30)$$

o operador $\exp[c_0(t) J_0]$ atua no estado de forma a gerar

$$\Psi(q, t) = \exp\left[\frac{\iota c_+(t)}{2\hbar} q^2\right] \exp\left[\frac{c_0(t)}{4}\right] \exp\left[\frac{c_0(t)}{2} q \partial_q\right] \langle q | \exp[c_-(t) J_-] | \psi_0 \rangle. \quad (4.31)$$

A igualdade (4.30) pode ser verificada a partir da expansão da exponencial:

$$\langle q | \exp\left[\frac{\iota c_0(t)}{2\hbar} (QP)\right] | \phi \rangle = \langle q | \left(1 + \frac{\iota c_0(t) QP}{\hbar} + \frac{\iota^2 c_0(t)^2 QPQP}{2! 4\hbar^2} + \dots\right) | \phi \rangle. \quad (4.32)$$

A atuação dos dois primeiros termos é imediata. Os termos de ordem superior têm a forma

$$\langle q | \frac{a^n (QP)^n}{n!} | \phi \rangle = \frac{a^n q}{n!} \langle q | PQP \dots QP | \phi \rangle. \quad (4.33)$$

Inserindo $n - 1$ identidades de autoestados de posição:

$$\begin{aligned} & \frac{a^n q}{n!} \langle q | PQP \dots QP | \phi \rangle \\ &= \frac{a^n q}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dq' \langle q | P | q' \rangle q' \int_{-\infty}^{\infty} dq'' \langle q' | P | q'' \rangle q'' \dots \int_{-\infty}^{\infty} dq^{(n-1)} \langle q^{(n-1)} | P | \phi \rangle \\ &= \frac{(\hbar a)^n q \partial_q}{i^n n!} \int dq' \delta(q - q') q' \partial_{q'} \int dq'' \dots \\ & \quad \left(\delta(q' - q'') q'' \dots \partial_{q^{(n-2)}} \int dq^{(n-1)} \delta(q^{(n-1)} - q^{(n-2)}) q^{(n-1)} \partial_{q^{(n-1)}} \langle q^{(n-1)} | \phi \rangle \right) \\ &= \frac{(\hbar a)^n}{i^n n!} (q \partial_q) (q \partial_q) \dots (q \partial_q) \langle q | \phi \rangle = \frac{(\hbar a)^n}{i^n n!} (q \partial_q)^n \langle q | \phi \rangle, \end{aligned} \quad (4.34)$$

logo,

$$\begin{aligned}\langle q | \exp \left[\frac{\iota c_0(t)}{2\hbar} (QP) \right] | \phi \rangle &= \left(1 + \frac{c_0(t)}{2} q \partial_q + \frac{c_0(t)^2}{8} (q \partial_q)^2 + \dots \right) \langle q | \phi \rangle \\ &= \exp \left[\frac{c_0(t)}{2} q \partial_q \right] \phi(q, t).\end{aligned}\quad (4.35)$$

Tem-se ainda que $\exp[a x \partial_x] f(x) = f(e^a x)$. De fato:

$$e^{ax \partial_x} x^n = x^n + \frac{n^2 a^2}{2!} x^n + \frac{n^3 a^3}{3!} x^n + \dots = \left(1 + \frac{n^2 a^2}{2!} + \frac{n^3 a^3}{3!} + \dots \right) x^n = (e^a x)^n$$

e

$$e^{ax \partial_x} f(x) = e^{ax \partial_x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_x f(x)|_{(x=b)}}{n!} (x-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_x f(x)|_{(x=b)}}{n!} [e^a (x-b)]^n = f(e^a x).$$

Então

$$\exp \left[\frac{c_0(t)}{2} q \partial_q \right] \phi(q, t) = \phi(e^{c_0/2} q, t). \quad (4.36)$$

Para atuar com $\exp[\iota c_- J_-]$, inserimos uma identidade na base dos momentos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle q | \exp \left[\frac{\iota c_-(t)}{2\hbar} P^2 \right] | p \rangle \langle p | \psi_0 \rangle dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{\iota c_-(t)}{2\hbar} p^2 + \frac{\iota p q}{\hbar} \right] \langle p | \psi_0 \rangle dp. \quad (4.37)$$

Toma-se o estado inicial como uma Gaussiana,

$$\langle q | \psi_0 \rangle = \left(\frac{1}{2\pi \Delta_{q,0}^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{(q - q_0)^2}{4\Delta_{q,0}^2} + \frac{\iota p_0 q}{\hbar} \right], \quad (4.38)$$

ou ainda

$$\langle p | \psi_0 \rangle = \left(\frac{\Delta_{q,0}^2}{2\hbar^2 \pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{\Delta_{q,0}^2 (p - p_0)^2}{4\hbar^2} - \frac{\iota (p - p_0) q_0}{\hbar} \right]. \quad (4.39)$$

A integral toma então a forma

$$\begin{aligned}& \left(\frac{\Delta_{q,0}^2}{8\hbar^4 \pi^3} \right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{\iota c_-(t)}{2\hbar} p^2 + \frac{\iota p (q - q_0)}{\hbar} - \frac{\Delta_{q,0}^2 (p - p_0)^2}{4\hbar^2} + \frac{\iota}{\hbar} q_0 p_0 \right] dp \\ &= \left(\frac{\Delta_{q,0}^2}{8\hbar^4 \pi^3} \right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\left(\frac{\Delta_{q,0}^2}{4\hbar^2} - \frac{\iota c_-(t)}{2\hbar} \right) p^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{\iota (q - q_0)}{\hbar} - \frac{\Delta_{q,0}^2}{2\hbar^2} p_0 \right) p - \frac{\Delta_{q,0}^2}{4\hbar^2} p_0^2 + \frac{\iota}{\hbar} q_0 p_0 \right] dp,\end{aligned}\quad (4.40)$$

cujas solução, completando-se o quadrado do expoente, é

$$\Phi(q, t) = \left(\frac{2\Delta_{q,0}^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{\Delta_{q,0}^2 - 2\iota\hbar c_-} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{\left(\iota q - \iota q_0 + \frac{\Delta_{q,0}^2}{2\hbar} p_0 \right)^2}{\Delta_{q,0}^2 - 2\iota\hbar c_-} - \frac{\Delta_{q,0}^2}{4\hbar^2} p_0^2 + \frac{\iota q_0 p_0}{\hbar} \right]. \quad (4.41)$$

Pode-se trabalhar no resultado para obter

$$\Phi(q, t) = \left(\frac{2 \Delta_{q,0}^2 \pi^{-1}}{\Delta_{q,0}^4 + 4 \hbar^2 c_-^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{(q - q_0 + c_- p_0)^2}{\Delta_{q,0}^2 - 2 \iota \hbar c_-} + \frac{\iota c_-}{2 \hbar} p_0^2 + \frac{\iota}{\hbar} p_0 (q - q_0) - \iota \theta \right], \quad (4.42)$$

sendo $\tan(2\theta) = -\frac{2 \hbar c_-(t)}{\Delta_q^2}$.

Então,

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) &= \exp \left[\frac{\iota c_+(t)}{2 \hbar} q^2 \right] \exp \left[\frac{c_0(t)}{4} \right] \exp \left[\frac{c_0(t)}{2} q \partial_q \right] \Phi(q, t) \\ &= \exp \left[\frac{\iota c_+(t)}{2 \hbar} q^2 \right] \exp \left[\frac{c_0(t)}{4} \right] \Phi(e^{c_0(t)/2} q, t), \end{aligned} \quad (4.43)$$

cuja forma final fica

$$\Psi(q, t) = A \exp \left[-\frac{(q - e^{-\frac{c_0}{2}}(q_0 - c_- p_0))^2}{e^{-c_0}(\Delta_{q,0}^2 - 2 \iota \hbar c_-)} + \iota \frac{c_-}{2 \hbar} p_0^2 + \frac{i e^{\frac{c_0}{2}}}{\hbar} p_0 q - \iota \theta + \iota \frac{c_+}{2 \hbar} q^2 \right], \quad (4.44)$$

sendo

$$A = \left(\frac{2}{\pi \Delta_q^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.45)$$

e

$$\Delta_q(t) = \left| e^{-\frac{c_0(t)}{2}} \right| \Delta_{q,0} \sqrt{1 + \frac{4 \hbar^2 c_-^2}{\Delta_{q,0}^4}}. \quad (4.46)$$

E a densidade de probabilidade resulta em

$$|\Psi(q, t)|^2 = A^2 \exp \left[-\frac{2}{\Delta_q^2} (q - e^{-\frac{c_0}{2}}(q_0 - c_- p_0))^2 \right]. \quad (4.47)$$

Os valores esperados de Q , Q^2 , P e P^2 são:

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(q, t) q \Psi^*(q, t) dq \\ &= \left(\frac{2}{\pi \Delta_q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (q + e^{-\frac{c_0}{2}} q_0 - e^{-\frac{c_0}{2}} c_- p_0) \exp \left[-\frac{2q^2}{\Delta_q^2} \right] dq \\ &= e^{-\frac{c_0}{2}} (q_0 - c_- p_0); \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \langle Q^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(q, t) q^2 \Psi^*(q, t) dq \\ &= \left(\frac{2}{\pi \Delta_q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (q + e^{-\frac{c_0}{2}} q_0 - e^{-\frac{c_0}{2}} c_- p_0)^2 \exp \left[-\frac{2q^2}{\Delta_q^2} \right] dq \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$= \Delta_{q,0}^2 e^{-c_0} \left(1 + \frac{4\hbar^2 c_-^2}{\Delta_q^4} \right) + e^{-c_0} (q_0 - c_- p_0)^2;$$

$$\langle P \rangle = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(q, t) \partial_q \Psi^*(q, t) dq = e^{-\frac{c_0}{2}} [(e^{c_0} - c_+ c_-) p_0 + c_+ q_0]; \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \langle P^2 \rangle &= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(q, t) \partial_q^2 \Psi^*(q, t) dq \\ &= e^{-c_0} \frac{\Delta_{q,0}^2 c_+^2}{4} + e^{-c_0} \frac{\hbar^2 (e^{c_0} - c_+ c_-)^2}{\Delta_{q,0}^2} + e^{-c_0} [(e^{c_0} - c_+ c_-) p_0 - c_+ q_0]^2, \end{aligned} \quad (4.51)$$

e as incertezas em Q e P e o produto destas grandezas são

$$\Delta_Q(t) = \sqrt{\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2} = \Delta_q(t), \quad (4.52)$$

$$\Delta_P(t) = \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2} = \left[e^{-c_0} \frac{\Delta_{q,0}^2 c_+^2}{4} + e^{-c_0} \frac{\hbar^2 (e^{c_0} - c_+ c_-)^2}{\Delta_{q,0}^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.53)$$

$$\Delta_Q(t) \Delta_P(t) = \frac{\hbar}{2} \left[\left(1 - \frac{c_+ c_-}{e^{c_0}} \right)^2 + \frac{c_+^2 c_-^2}{e^{2c_0}} + \frac{\Delta_{q,0}^4 c_+^2}{4\hbar e^{2c_0}} + \frac{4\hbar^2 c_-^2}{\Delta_{q,0}^4} \left(1 - \frac{c_+ c_-}{e^{c_0}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.54)$$

A seguir serão tratados alguns casos analíticos de interesse: (i) Partícula Livre; (ii) Oscilador Harmônico; (iii) Partícula Amortecida e (iv) Oscilador Harmônico Amortecido (KC). Os objetivos foram verificar a validade do método partindo de soluções mais simples e obter as soluções a serem trabalhadas posteriormente.

(i) Partícula livre: $m = m_0$, $k = 0$

Nesse primeiro caso, a equação (4.27) e as condições iniciais do coeficiente u são

$$\ddot{u} = 0, \quad (4.55a)$$

$$u(0) = 1, \quad (4.55b)$$

$$u'(0) = 0; \quad (4.55c)$$

que implicam

$$u(t) = 1. \quad (4.56)$$

Os coeficientes do operador de evolução tomam então a forma

$$c_+(t) = m(t) \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = 0, \quad (4.57a)$$

$$c_-(t) = -u(0)^2 \int_0^t \frac{dt'}{m(t')u(t')^2} = -\frac{t}{m}, \quad (4.57b)$$

$$c_0(t) = -\ln \frac{u(t)^2}{u(0)^2} = 0. \quad (4.57c)$$

E a função de onda do estado e sua densidade de probabilidade

$$\Psi(q, t) = \left(\frac{2}{\pi \Delta_q^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{\left(q - q_0 - \frac{p_0}{m}t \right)^2}{\Delta_{q,0}^2 + \frac{2\hbar t}{m}} - \imath\theta - \imath \frac{t}{2m\hbar} p_0^2 + \imath \frac{1}{\hbar} p_0 q \right] \quad (4.58)$$

e

$$|\Psi(q, t)|^2 = \left(\frac{2}{\pi \Delta_q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{2}{\Delta_q^2} \left(q - q_0 - \frac{p_0}{m}t \right)^2 \right], \quad (4.59)$$

com

$$\Delta_q(t) = \Delta_{q,0} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \Delta_{q,0}^4}}, \quad (4.60)$$

em concordância com o esperado para o caso [17, 30].

E os valores médios e incertezas

$$\langle Q \rangle = q_0 + \frac{p_0}{m}t, \quad (4.61a)$$

$$\langle P \rangle = p_0, \quad (4.61b)$$

$$\Delta_Q = \frac{\Delta_q}{2} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \Delta_q^4}}, \quad (4.61c)$$

$$\Delta_P = \frac{\hbar}{\Delta_q}, \quad (4.61d)$$

$$\Delta_Q \Delta_P = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \Delta_q^4}}, \quad (4.61e)$$

também de acordo com o esperado.

(ii) **Oscilador Harmônico:** $m = m_0$, $k = k_0$

Nesse caso tem-se a seguinte equação diferencial, sujeita às mesmas condições anteriores, para o parâmetro u :

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0, \quad (4.62a)$$

$$u(0) = 1, \quad (4.62b)$$

$$u'(0) = 0. \quad (4.62c)$$

Tem-se por solução

$$u(t) = \cos(\omega t). \quad (4.63)$$

E é possível então escrever

$$c_+(t) = m(t) \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -m\omega \tan(\omega t), \quad (4.64a)$$

$$c_-(t) = -u(0)^2 \int_0^t \frac{dt'}{m(t')u(t')^2} = -\frac{\tan(\omega t)}{m\omega}, \quad (4.64b)$$

$$c_0(t) = -\ln \frac{u(t)^2}{u(0)^2} = -2 \ln [\cos(\omega t)]. \quad (4.64c)$$

A função de onda evoluída desse pacote gaussiano será, então,

$$\Psi(q, t) = \left(\frac{2}{\pi \Delta_q^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{\left(q - q_0 \cos(\omega t) - \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) \right)^2}{\Delta_{q,0}^2 \cos(\omega t) + \frac{2\hbar}{\omega m} \sin(\omega t)} - \imath \theta - \imath \frac{\tan(\omega t)}{2m\omega\hbar} p_0^2 \right. \\ \left. + \imath \frac{\cos(\omega t)}{\hbar} p_0 q - \imath \frac{m\omega \tan(\omega t)}{2\hbar} q^2 \right] \quad (4.65)$$

e sua densidade de probabilidade

$$|\Psi(q, t)|^2 = \left(\frac{2}{\pi \Delta_q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{2}{\Delta_q^2} \left(q - q_0 \cos(\omega t) - \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) \right)^2 \right], \quad (4.66)$$

sendo

$$\Delta_q(t) = \sqrt{\Delta_{q,0}^2 \cos(\omega t)^2 + \frac{4\hbar^2}{m^2 \omega^2 \Delta_{q,0}^2} \sin(\omega t)^2}. \quad (4.67)$$

Para as incertezas e médias, encontra-se:

$$\langle Q \rangle = q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t), \quad (4.68a)$$

$$\langle P \rangle = p_0 \cos(\omega t) - q_0 m\omega \sin(\omega t), \quad (4.68b)$$

$$\Delta_Q = \sqrt{\frac{\Delta_{q,0}^2}{4} \cos(\omega t)^2 + \frac{\hbar^2}{m^2 \omega^2 \Delta_{q,0}^2} \sin(\omega t)^2}, \quad (4.68c)$$

$$\Delta_P = \sqrt{\frac{\hbar^2}{\Delta_{q,0}^2} \cos(\omega t)^2 + \frac{m^2 \omega^2 \Delta_{q,0}^2}{4} \sin(\omega t)^2}, \quad (4.68d)$$

$$\Delta_Q \Delta_P = \frac{\hbar}{2} \left(\cos(\omega t)^4 + \sin(\omega t)^4 + \left(\frac{m^2 \omega^2 \Delta_{q,0}^4}{4\hbar^2} + \frac{4\hbar^2}{m^2 \omega^2 \Delta_{q,0}^4} \right) \cos(\omega t)^2 \sin(\omega t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.68e)$$

também de acordo com o conhecido da literatura [17, 30].

(iii) **Partícula amortecida:** $m = m_0 e^{\lambda t}$, $k = 0$

Para a partícula amortecida, a equação (4.27) e as condições iniciais do coeficiente u são

$$\ddot{u} + \lambda \dot{u} = 0, \quad (4.69a)$$

$$u(0) = 1, \quad (4.69b)$$

$$u'(0) = 0; \quad (4.69c)$$

implicando novamente

$$u(t) = 1. \quad (4.70)$$

Os coeficientes do operador de evolução são, por sua vez,

$$c_+(t) = m(t) \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = 0, \quad (4.71a)$$

$$c_-(t) = -u(0)^2 \int_0^t \frac{dt'}{m(t')u(t')^2} = -\frac{e^{-\lambda t} - 1}{\lambda m_0}, \quad (4.71b)$$

$$c_0(t) = -\ln \frac{u(t)^2}{u(0)^2} = 0; \quad (4.71c)$$

forneendo uma função de onda e distribuição de probabilidade nas formas

$$\Psi(q, t) = \left(\frac{2}{\pi \Delta_q^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{\left(q - q_0 - \frac{e^{-\tau} - 1}{\lambda m_0} p_0 \right)^2}{\Delta_{q,0}^2 + \frac{2\iota\hbar}{\lambda m_0} (e^{-\tau} - 1)} - \iota\theta - \iota \frac{e^{-\tau} - 1}{2\lambda m_0 \hbar} p_0^2 + \frac{\iota}{\hbar} p_0 q \right] \quad (4.72)$$

e

$$|\Psi(q, t)|^2 = \left(\frac{2}{\pi \Delta_q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{2}{\Delta_q^2} \left(q - q_0 - \frac{e^{-\tau} - 1}{\lambda m_0} p_0 \right)^2 \right], \quad (4.73)$$

respectivamente, e com

$$\Delta_q(t) = \Delta_{q,0} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2}{\lambda^2 m^2 \Delta_{q,0}^4} (1 - e^{-\tau})^2}. \quad (4.74)$$

As médias e incertezas na posição e no momento ficaram

$$\langle Q \rangle = q_0 + \frac{e^{-\lambda t} - 1}{\lambda m_0} p_0, \quad (4.75a)$$

$$\langle P \rangle = p_0, \quad (4.75b)$$

$$\Delta_Q = \frac{\Delta_{q,0}}{2} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 (e^{-\lambda t} - 1)^2}{\lambda^2 m_0^2 \Delta_q^4}}, \quad (4.75c)$$

$$\Delta_P = \frac{\hbar}{\Delta_{q,0}}, \quad (4.75d)$$

$$\Delta_Q \Delta_P = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 (e^{-\lambda t} - 1)^2}{\lambda^2 m_0^2 \Delta_q^4}}. \quad (4.75e)$$

A dinâmica do centro do pacote e de seu desvio quadrático podem ser observadas, respectivamente, nas Figuras 6a e 6b. Pode-se verificar que, como no caso anterior, a

partícula se propaga com momento constante p_0 e tem incerteza Δ_Q crescente durante a propagação e Δ_P constante. Ocorre, no entanto, que sua posição converge para $q_0 - \frac{1}{\lambda m_0} p_0$ no limite de tempo infinito. A incerteza na posição também converge nesse limite, atingindo o valor $\frac{\Delta_{q,0}}{2} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2}{\lambda^2 m_0^2 \Delta_q^4}}$. O produto das incertezas $\Delta_Q \Delta_P$ se mantém constante.

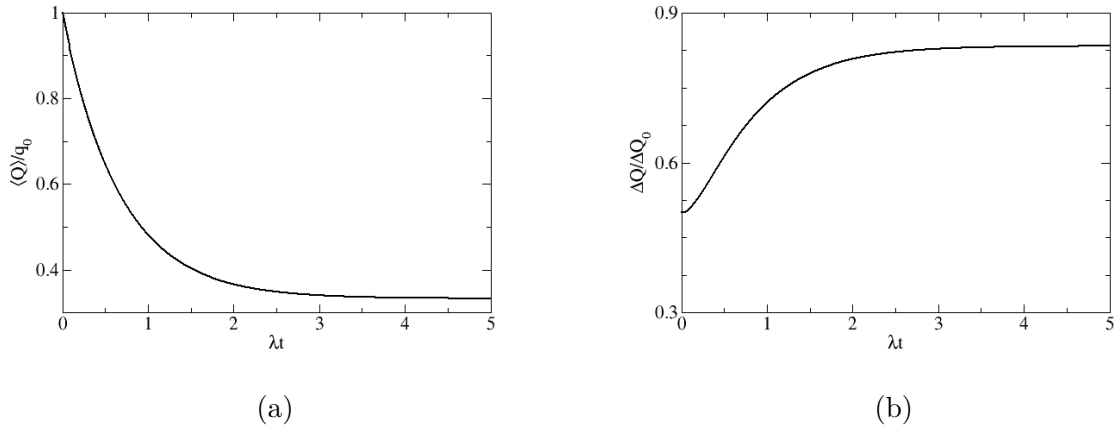


Figura 6 – (a) Valor médio e (b) desvio padrão do operador Q para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Partícula Amortecida com $\frac{p_0}{q_0 \lambda m_0} = 1$ e $\frac{\hbar}{\lambda m_0 \Delta_{q,0}^2} = 1$.

A partir desse modelo bastante simples já é possível trabalhar algumas das questões levantadas pelo trabalho, como a relativa ao repouso em sistemas quânticos. É interessante definir o operador velocidade a partir da formulação de Heisenberg como:

$$V_H = \dot{Q}_H = \frac{[Q_H, \mathcal{H}_H]}{i\hbar}, \quad (4.76)$$

e que nesse caso particular tem a forma

$$V_H = \frac{P_H}{m} e^{-\lambda t}. \quad (4.77)$$

Assim definida, é possível calcular sua média e seu desvio quadrático como

$$\langle V_H \rangle = \frac{\langle P_H \rangle}{m(\lambda t)} = \frac{e^{-\lambda t}}{m_0} \langle P_H \rangle, \quad (4.78a)$$

$$\Delta_{V_H} = \sqrt{\langle V_H^2 \rangle - \langle V_H \rangle^2} = \sqrt{\frac{e^{-2\lambda t}}{m_0^2} \langle P_H^2 \rangle - \frac{e^{-2\lambda t}}{m_0^2} \langle P_H \rangle^2} = \frac{e^{-\lambda t}}{m_0} \Delta_{P_H}, \quad (4.78b)$$

que, no caso da partícula amortecida, ficam

$$\langle V_H \rangle = \frac{p_0}{m_0} e^{-\lambda t}, \quad (4.79a)$$

$$\Delta_{V_H} = \frac{\hbar}{m_0 \Delta_{q,0}} e^{-\lambda t}. \quad (4.79b)$$

Observa-se aqui que a dissipação consegue reproduzir um efeito similar ao repouso encontrado classicamente, visto que os valores esperados da posição e da velocidade, como

definida, convergem para um valor definido e para zero, respectivamente. A partir da Eq. 4.75c não é possível declarar a localização dessa partícula, pelo contrário, ela se deslocaliza até atingir um limite superior. Dada a relação entre a irrealidade e a deslocalização do pacote Gaussiano dada por (3.81), pode-se afirmar que essa partícula se torna menos real com a atuação do Hamiltoniano, não podendo assim reproduzir um processo de medição.

O valor esperado do momento canônico não encontra aqui correspondência direta com nenhuma grandeza física, bem como o Hamiltoniano do sistema. Como argumentado no caso clássico, isso talvez indique que essas não sejam as grandezas mais adequadas ao se trabalhar com um modelo efetivo, mas sim a posição e a velocidade.

(iv) **Oscilador Harmônico Amortecido:** $m = m_0 e^{2\lambda t}$, $k = k_0 e^{2\lambda t}$

A equação diferencial do parâmetro u se escreve, nesse caso,

$$\ddot{u} + 2\lambda\dot{u} + \frac{k_0}{m_0}u = \ddot{u} + 2\lambda\dot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad (4.80)$$

cuja solução, definindo-se as variáveis $\tau = \lambda t$ e $\zeta = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\lambda^2}}$, tem a forma

$$u(\tau) = u_0 e^{-\tau} \left[\cosh(\zeta\tau) + \left(1 + \frac{u'_0}{\lambda u_0}\right) \frac{\sinh(\zeta\tau)}{\zeta} \right]. \quad (4.81)$$

Trata-se da mesma função obtida para a trajetória clássica dada pela Eq. (4.10a), ou seja, a solução quântica é escrita em termos da solução clássica. Pode-se ir além e identificar a equação que descreve o parâmetro $u(t)$, Eq. (4.27), com a equação de movimento da posição dada pela Eq. (4.8), implicando que, em todos os sistemas evoluídos pelo operador de evolução (4.23), tem-se a solução quântica em termos da trajetória clássica. Aplicando-se as condições de contorno $u(0) = 1$ e $u(0)' = 0$, tem-se

$$u(\tau) = e^{-\tau} \left[\cosh(\zeta\tau) + \frac{\sinh(\zeta\tau)}{\zeta} \right]. \quad (4.82)$$

O cálculo dos parâmetros $c_{+,0,-}$ conduz a

$$c_+(t) = m(t) \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -\frac{k_0}{\lambda} \frac{e^{2\tau}}{\zeta \coth(\zeta\tau) + 1}, \quad (4.83a)$$

$$c_-(t) = -u(0)^2 \int_0^t \frac{dt'}{m(t')u(t')^2} = -\frac{1}{\lambda m_0} \frac{1}{\zeta \coth(\zeta\tau) + 1}, \quad (4.83b)$$

$$c_0(t) = -\ln \frac{u(t)^2}{u(0)^2} = 2 \ln \left(\frac{e^\tau}{\cosh(\zeta\tau) + \frac{\sinh(\zeta\tau)}{\zeta}} \right). \quad (4.83c)$$

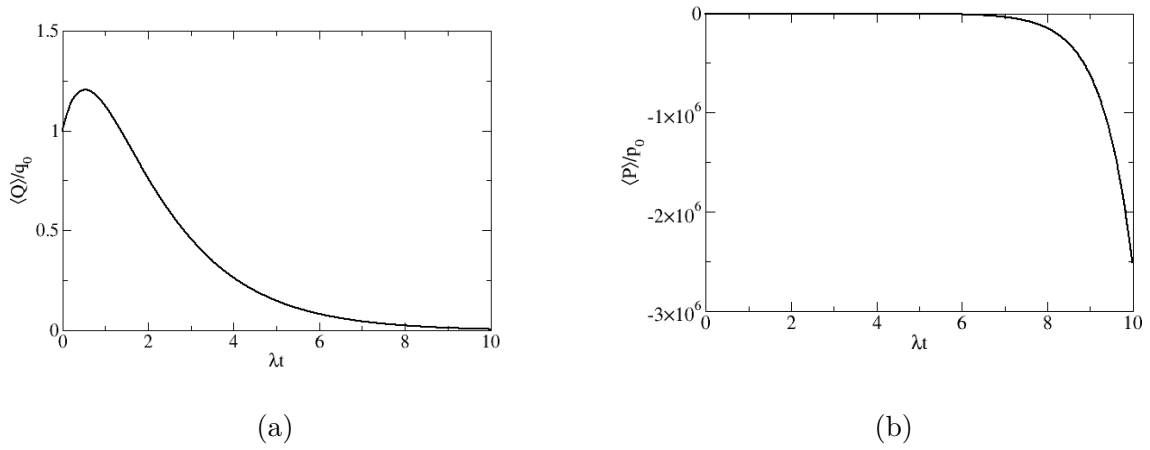


Figura 7 – Valor médio dos operadores (a) Q e (b) P para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Oscilador Harmônico Amortecido no regime superamortecido, com $\lambda/\omega = 1.1$. As outras constantes envolvidas foram tomadas como unitárias.

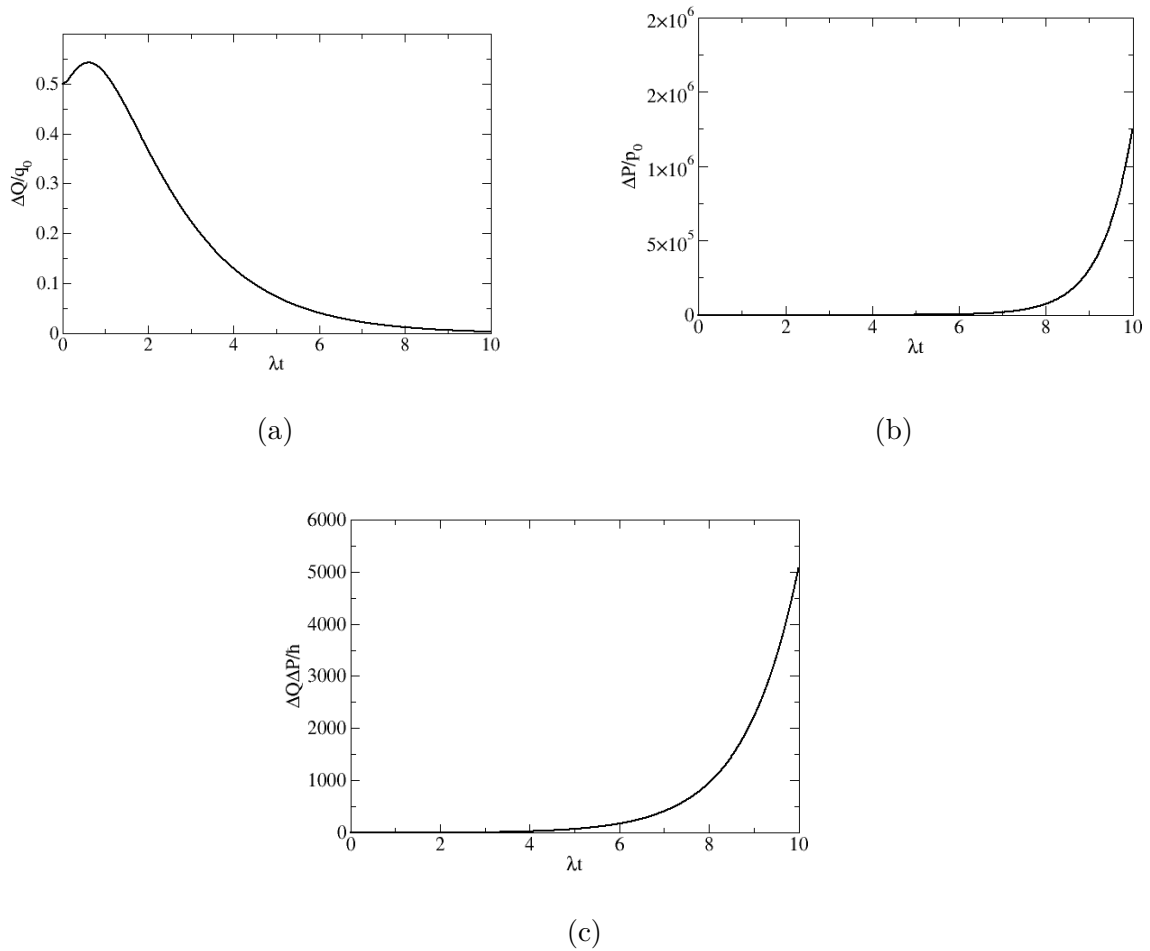


Figura 8 – Desvio médio dos operadores (a) Q e (b) P para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Oscilador Harmônico Amortecido no regime superamortecido, com $\lambda/\omega = 1.1$, e (c) o produto dessas incertezas. As outras constantes envolvidas foram tomadas como unitárias.

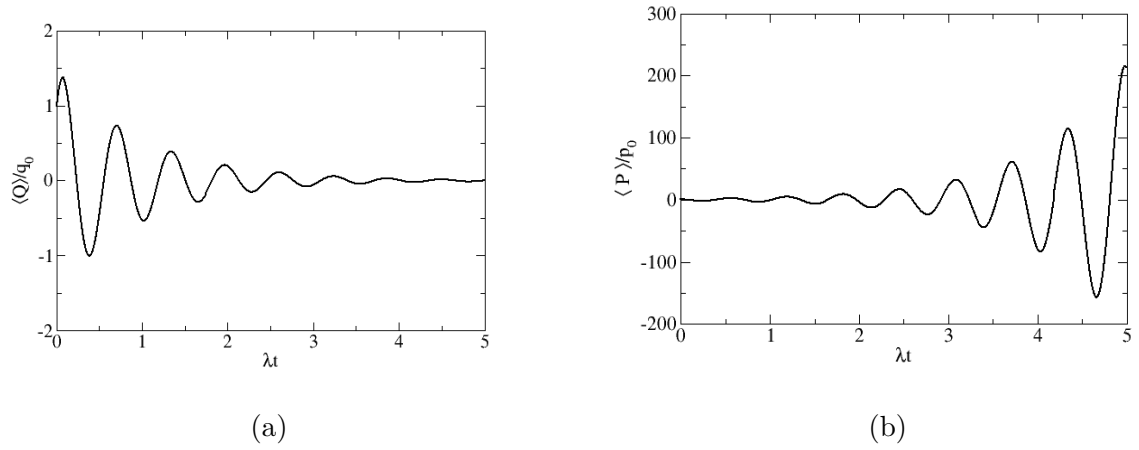


Figura 9 – Valor médio dos operadores (a) Q e (b) P para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Oscilador Harmônico Amortecido no regime subamortecido, com $\lambda/\omega = 0.1$. As outras constantes envolvidas foram tomadas como unitárias.

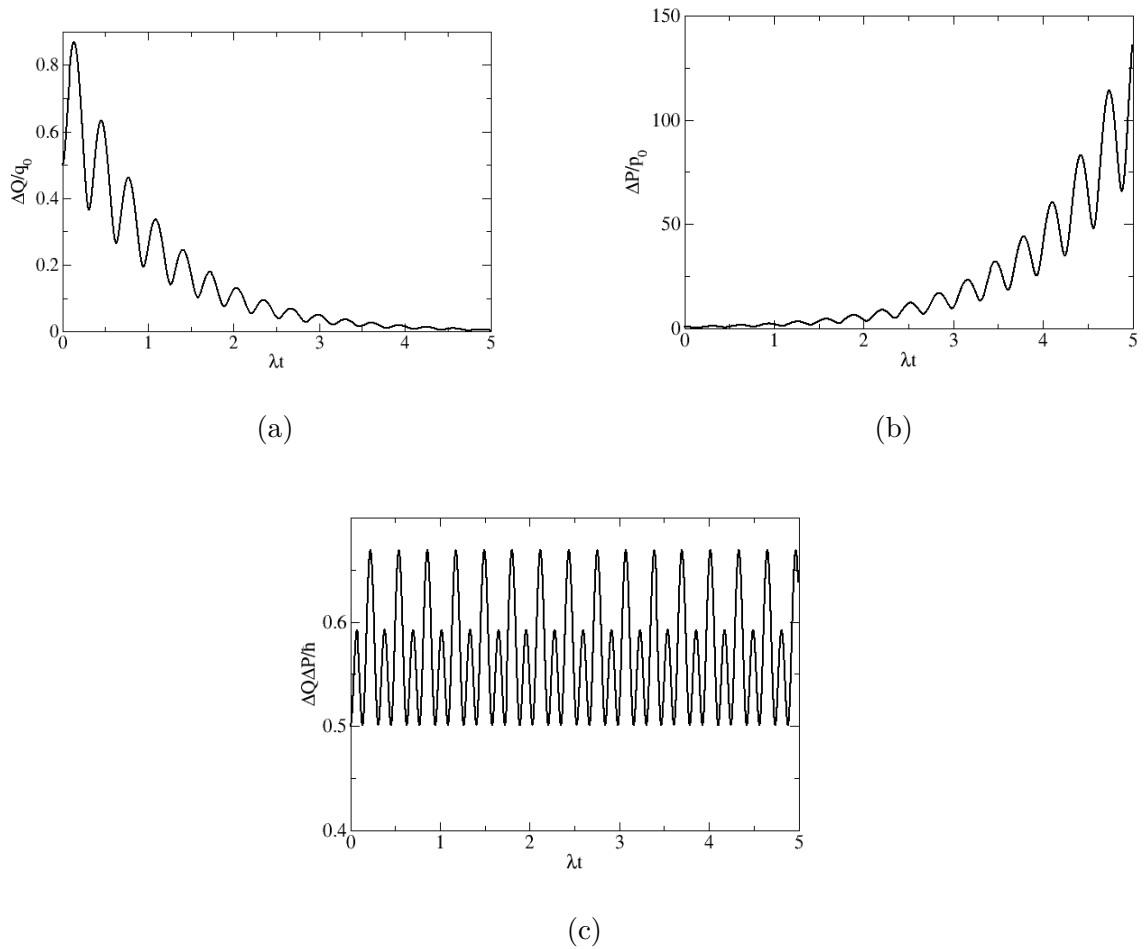


Figura 10 – Desvio médio dos operadores (a) Q e (b) P para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Oscilador Harmônico Amortecido no regime subamortecido, com $\lambda/\omega = 0.1$ e (c) o produto dessas incertezas. As outras constantes envolvidas foram tomadas como unitárias.

Como no caso clássico, existem também no quântico três regimes de evolução do sistema: subamortecido, $\lambda < \omega$; superamortecido, $\lambda > \omega$; e o criticamente amortecido, $\lambda = \omega$. As médias de posição e momento. O caso criticamente amortecido se comporta de forma bastante similar ao superamortecido, motivo pelo qual sua análise não será feita de forma detalhada.

A dinâmica do centro do pacote é similar a da trajetória clássica, havendo oscilação quando o amortecimento é inferior ao amortecimento crítico, com decaimento exponencial, e decaindo exponencialmente sem oscilações quando superamortecido, dinâmicas que podem ser verificadas nas Figuras 7b e 9a, respectivamente. De forma equivalente para o momento médio, o sistema apresentará oscilação quando subamortecido, com crescimento exponencial, e crescimento exponencial sem oscilações quando superamortecido, comportamento apresentado nas Figuras 7a e 9b.

Observa-se que não ocorre violação ao princípio de incerteza como acusam certos autores [39, 47]. O produto das incertezas cresce exponencialmente no regime superamortecido como mostrado na Figura 8c, tendo seu valor mínimo em $t = 0$ e sendo este maior que $\frac{\hbar}{2}$. No regime subamortecido, como mostrado na Figura 10c, esse produto oscila no tempo, sempre acima da quota imposta pelo princípio.

Percebe-se ainda que a dissipação efetiva proposta por Kanai e Caldirola tem o efeito de localizar a partícula sujeita a essa evolução, como ocorre nos processos de medida de posição (Figuras 8a e 10a). A fim de compensar essa localização, a incerteza no momento canônico diverge exponencialmente em ambos os casos (Figuras 8b e 10b).

A irrealidade da posição de um estado Gaussiano sujeito a esse Hamiltoniano pode ser dada substituindo-se (4.52) com os coeficientes (4.83) na expressão (3.81). Como esperado, uma vez que o estado se localiza com o tempo e a irrealidade é uma função convexa do desvio quadrático, vê-se que o estado se torna cada vez mais real. Essa realidade na posição é acompanhada por um aumento de irrealidade do momento canônico da partícula. Esses efeitos podem ser observados nas Figuras 8a, 8b, 10a e 10b.

Partindo da definição de velocidade dada em (4.77), tem-se que esse operador assume no caso particular do Hamiltoniano de Kanai-Caldirola a forma

$$V_H = \frac{P_H}{m} e^{-2\lambda t}, \quad (4.84)$$

equivalente ao caso anterior, e cujos média e desvio quadrático são

$$\langle V_H \rangle = \frac{\langle P_H \rangle}{m(\tau)} = \frac{e^{-2\tau}}{m_0} \langle P_H \rangle, \quad (4.85a)$$

$$\Delta_{V_H} = \sqrt{\langle V_H^2 \rangle - \langle V_H \rangle^2} = \sqrt{\frac{e^{-4\tau}}{m_0^2} \langle P_H^2 \rangle - \frac{e^{-4\tau}}{m_0^2} \langle P_H \rangle^2} = \frac{e^{-2\tau}}{m_0} \Delta_{P_H}. \quad (4.85b)$$

Também como no caso clássico, a média da velocidade da partícula vai a zero em qualquer dos regimes, como pode ser observado para o caso $\lambda < \omega$ na Figura 11a e para o

caso $\lambda > \omega$ na Figura 11b, bem como o desvio quadratico médio, cujo comportamento pode ser observado na Figura 12a no caso $\lambda < \omega$ e na Figura 12b no caso $\lambda > \omega$. Esse resultado condiz com o processo de medições sucessivas de posição uma vez que, ao se concretizar uma medição de posição, espera-se que o resultado obtido se mantenha o mesmo em cada uma delas, não podendo assim variar temporalmente. Caso houvesse essa variação temporal, seria natural imaginar que esse resultado variaria entre os instantes distintos de cada medição, fato que não se observa na mecânica quântica.

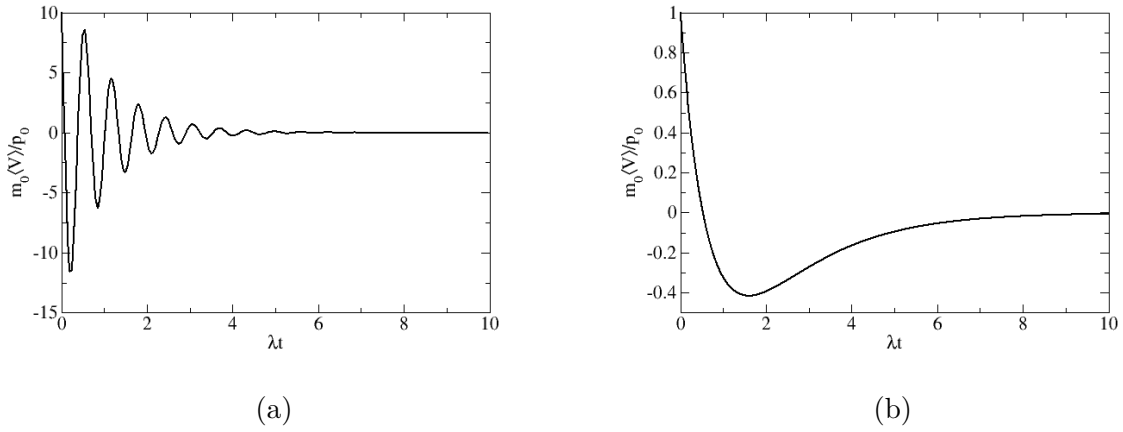


Figura 11 – Valor médio do operador V_H para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Oscilador Harmônico Amortecido no regime subamortecido com (a) $\lambda/\omega = 0.1$ (b) $\lambda/\omega = 1.1$. As outras constantes envolvidas foram tomadas como unitárias.

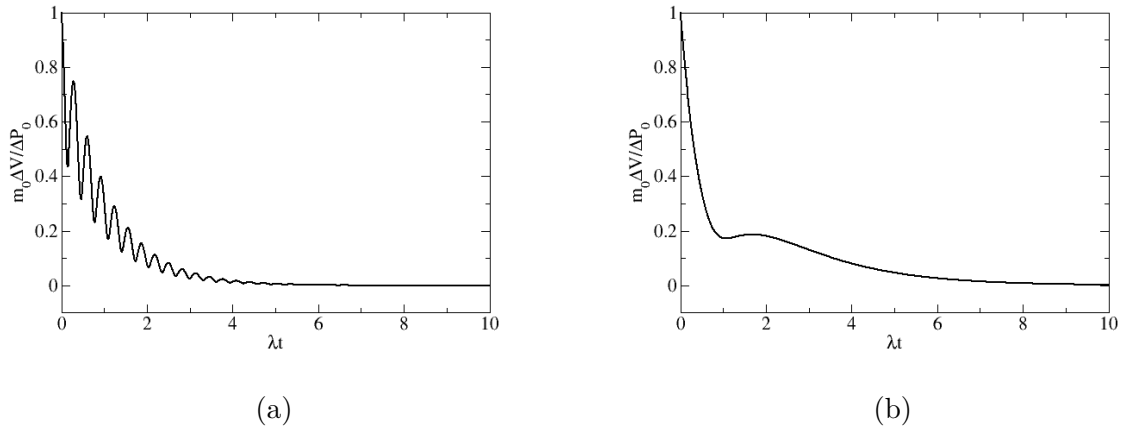


Figura 12 – Desvio médio do operador V_H para um pacote Gaussiano sujeito a um Hamiltoniano do tipo Oscilador Harmônico Amortecido no regime subamortecido com (a) $\lambda/\omega = 0.1$ (b) $\lambda/\omega = 1.1$. As outras constantes envolvidas foram tomadas como unitárias.

Supondo-se que a irrealidade da velocidade, como no caso da posição e momento, seja uma função do tipo (3.81) pode-se chegar a mesma conclusão que a obtida para a irrealidade da posição, ambas se tornam menos irreais pelo efeito da dissipação no decorrer

do tempo. A velocidade não somente se torna real mas também tende a se anular no limite assintótico. Esse resultado se enquadra na definição de repouso feita anteriormente no caso clássico, $(q, v) \rightarrow (0, 0)$, sendo que agora tem-se

$$(\langle Q \rangle, \langle V \rangle, \Delta_Q, \Delta_V, \mathfrak{I}(Q|\rho), \mathfrak{I}(V_H|\rho)) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0). \quad (4.86)$$

Pode-se concluir que a evolução promovida pelo Hamiltoniano KC reproduz a emergência da realidade da posição promovida pelo processo de medição desse observável. Além disso, reproduz o que poderia ser entendido como um equivalente quântico da noção de repouso clássico uma vez que a posição não varia com o tempo entre medidas sucessivas. Apesar de a velocidade e, conseqüentemente, o momento *mecânico* da partícula irem a zero no limite $\tau \rightarrow 0$, não se observa em nenhum dos casos violação ao princípio de incerteza, mantendo-se a grandeza $2\Delta_Q\Delta_P/\hbar$ sempre superior à unidade.

Embora bem sucedidos frente aos aspectos considerados até o presente momento, o modelo apresenta limitações importantes. A principal questão verificada foi a incapacidade desse modelo em simular o caráter estatístico da medição, pois a posição final da partícula será sempre a origem – ou no centro do potencial, no caso mais geral. Com o intuito de melhorar o modelo, consideramos a seguir o acoplamento entre dois sistemas quânticos sujeitos a um potencial relativo $\frac{1}{2}k(t)(Q_2 - Q_1)^2$, sendo $Q_{1,2}$ o operador posição no espaço $H_{1,2}$. A ideia é investigar um modelo que, como no caso de von Neumann, trate de forma quântica não somente a partícula (sistema 2) mas também o aparato medidor (sistema 1) e cuja dinâmica promova a interação desses dois sistemas.

4.4 Massas Acopladas

No caso de dois subsistemas de massas $m_1(t)$ e $m_2(t)$ sujeitas a um potencial relativo $\frac{k(t)}{2}(Q_2 - Q_1)^2$, o Hamiltoniano correspondente tem a forma

$$\mathcal{H} = \frac{P_1^2}{2m_1(t)} + \frac{P_2^2}{2m_2(t)} + \frac{1}{2}k(t)(Q_2 - Q_1)^2, \quad (4.87)$$

onde as dependências temporais estão mais uma vez presentes como um tratamento efetivo da interação entre a partícula, o aparato de medição e o ambiente, sendo este último qualquer grau de liberdade sobre o qual não se tem controle.

Como ocorre com o caso clássico, é preferível tratar esse sistema a partir de seu centro de massa e coordenadas relativas. Para tal, definem-se as variáveis

$$Q_c = \frac{m_1(t)Q_1 + m_2(t)Q_2}{m_1(t) + m_2(t)}, \quad (4.88a)$$

$$Q = Q_2 - Q_1, \quad (4.88b)$$

$$P_c = P_1 + P_2, \quad (4.88c)$$

$$P = \frac{m_1(t)P_2 - m_2(t)P_1}{m_1(t) + m_2(t)}; \quad (4.88d)$$

onde os índices c correspondem às coordenadas do centro de massa e as variáveis sem índices às coordenadas relativas. Pode-se então reescrever o Hamiltoniano como

$$\mathcal{H} = \frac{P_c^2}{2M(t)} + \frac{P^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}k(t)Q^2 = \mathcal{H}_c + \mathcal{H}_r, \quad (4.89)$$

sendo $M(t) = m_1(t) + m_2(t)$ a massa total e $m(t) = m_1(t)m_2(t)/M(t)$ a massa reduzida. Nota-se que, para o centro de massa, tem-se um Hamiltoniano de uma partícula livre dependente do tempo, enquanto que para a coordenada relativa o de um oscilador harmônico também dependente do tempo. A partir disso, pode-se escrever o operador de evolução nessas coordenadas como

$$U = U_c \otimes U_r = \exp[\imath c_c(t)J_c] \otimes \exp[\imath c_+(t)J_+] \exp[c_0(t)J_0] \exp[\imath c_-(t)J_-]; \quad (4.90)$$

sendo

$$J_c = \frac{1}{2\hbar}P_c^2, \quad (4.91a)$$

$$J_+ = \frac{1}{2\hbar}Q^2, \quad (4.91b)$$

$$J_- = \frac{1}{2\hbar}P^2, \quad (4.91c)$$

$$J_0 = \frac{\imath}{4\hbar}(PQ + QP); \quad (4.91d)$$

e

$$c_c(t) = - \int_0^t \frac{dt'}{M(t')}, \quad (4.92a)$$

$$c_+(t) = m(t) \frac{\dot{u}(t)}{u(t)}, \quad (4.92b)$$

$$c_-(t) = - \int_0^t \frac{dt'}{m(t')u(t')^2}, \quad (4.92c)$$

$$c_0(t) = - \ln u(t)^2. \quad (4.92d)$$

O parâmetro u deve satisfazer a equação (4.27), com $m(t)$ sendo a massa reduzida do sistema.

Tomando-se o estado inicial como o produto tensorial de estados gaussianos nos espaços H_1 e H_2 , sua função de onda do estado evoluído será dada pela relação

$$\Psi(q_c, q, t) = \langle q_c, q | U_c \otimes U_r | \psi_0 \rangle, \quad (4.93)$$

e é escrita nas coordenadas originais (q_1, q_2, p_1, p_2) como

$$\Psi(q_1, q_2, t) = \left(\frac{2}{\pi \Delta_c \Delta_r} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[- \frac{(m_1 q_1 + m_2 q_2)^2}{M^2 (\Delta_{c,0}^2 - 2\imath \hbar c_c)} - \imath \theta_c \right]$$

$$\exp \left[-\frac{\left(q_2 - q_1 - e^{-\frac{c_0}{2}} (q_0 - c_- p_0) \right)^2}{e^{-c_0} \left(\Delta_{r,0}^2 - 2\hbar c_- \right)} - \iota \theta + \iota \frac{c_-}{2\hbar} p_0^2 \right. \\ \left. + \frac{\iota e^{\frac{c_0}{2}}}{\hbar} p_0 (q_2 - q_1) + \iota \frac{c_+}{2\hbar} (q_2 - q_1)^2 \right], \quad (4.94)$$

na qual o momento inicial do centro de massa foi tomado como nulo, $p_{c,0} = 0$.

A fim de obtermos soluções analíticas, as funções do tempo foram tomadas na forma

$$m_1(t) = m_{01} e^{\lambda t}, \quad (4.95a)$$

$$m_2(t) = m_{02} e^{\lambda t}, \quad (4.95b)$$

$$k(t) = k_0 e^{\lambda t}; \quad (4.95c)$$

que fornecem $m = m_0 e^{\lambda t}$ e $M(t) = M_0 e^{\lambda t}$. Nesse caso, os coeficientes do operador de evolução serão equivalentes aos casos estudados de uma partícula amortecida para o centro de massa e de um oscilador harmônico amortecido para as coordenadas relativas.

As mesmas conclusões obtidas nos casos citados aplicam-se às coordenadas relativas e de centro de massa. Haverá, então, aumento de realidade da coordenada relativa de posição enquanto que a de centro de massa se manterá constante no limite assintótico do tempo para as coordenadas do centro de massa. Além disso, ambas as coordenadas tendem a uma situação de repouso em que a média e incerteza do operador velocidade se anulam e a posição tende a um valor definido.

Esse modelo possui ainda um elemento a mais, podendo reproduzir o caráter estatístico da medição. Isso se dá pelo fato de que a posição do centro de massa permanece indefinida para qualquer tempo dado que o desvio quadrático permanece constante. Assim, por mais que a posição relativa esteja definida, ainda é preciso um processo final que defina também a posição do centro de massa. Como no modelo de von Neumann, o modelo desenvolvido aqui não é suficiente para descrever tal processo, indicando somente que os subsistemas vão interagir e se emaranhar de forma que se pode conhecer o estado de um deles desde que se saiba o do outro.

A fim de se verificar o processo de emaranhamento emergente entre os sistemas no referencial do laboratório, calcula-se para o estado (4.94) a entropia de emaranhamento $E(\rho) = S_L(\rho_A) = 1 - P(\rho_A)$, sendo S_L a entropia linear definida em (2.26) e $P(\rho)$ a pureza do estado. A pureza para o estado reduzido ρ_A , $P(\rho_A) = \text{Tr } \rho_A^2$, é calculada a partir da função de onda do estado como

$$P(\rho_A) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 \vec{q} \Psi(q_1, q_2, t) \Psi^*(q_3, q_2, t) \Psi(q_3, q_4, t) \Psi^*(q_1, q_4, t). \quad (4.96)$$

Para o estado (4.94), essa grandeza pode ser escrita como

$$P(\rho_A) = N^4 \frac{\pi^2}{a_t^{1/2}}, \quad (4.97)$$

sendo

$$a_t = \frac{16}{\Delta_c^6 \Delta_r^6 (m_1 + m_2)^4} \left[(m_1 + m_2)^4 \Delta_c^4 \left(1 + \left(\frac{2\hbar c_-}{\Delta_{r,0}^2} - \frac{c_+ \Delta_r^2}{2\hbar} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + \Delta_r^2 \Delta_c^2 (m_1 + m_2)^2 \left(m_1^2 + m_2^2 + \frac{4\hbar c_c}{\Delta_{c,0}^2} \left(\frac{c_+ \Delta_r^2}{2\hbar} - \frac{2\hbar c_-}{\Delta_{r,0}^2} m_1 m_2 \right) \right) + m_1^2 m_2^2 \Delta_r^4 \left(1 + \frac{4\hbar^2 c_c^2}{\Delta_{c,0}^4} \right) \right] \quad (4.98)$$

e N o fator de normalização da função de onda,

$$N = \left(\frac{2}{\pi \Delta_c \Delta_r} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.99)$$

Não é simples obter conclusões diretas das formas analíticas encontradas para a pureza e, conseqüentemente, para o emaranhamento visto que as expressões são bastante complicadas além de muito extensas. Sua representação gráfica pode ser vista na [Figura 13](#) e nos permite concluir que, de fato, o sistema se emaranha no decorrer do tempo.

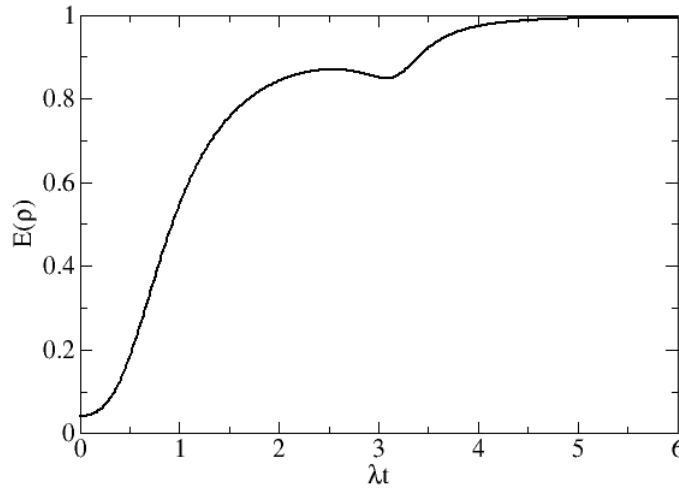


Figura 13 – Emaranhamento de duas partículas sujeitas a um potencial relativo do tipo oscilador harmônico amortecido com $\lambda/\omega = 0.7$ e outros parâmetros tomados como unitários.

Esse resultado correlaciona-se com a emergência de realidade na coordenada relativa da posição. Observa-se que essa grandeza cresce com o tempo pois, como argumentado anteriormente, a irreabilidade da posição é uma função monotonicamente crescente do desvio quadrático médio, $\mathfrak{I}(Q|\rho) = \ln(\sqrt{2\pi e} \Delta_r(t))$, e o desvio da coordenada relativa se comporta como nas Figuras [10a](#) e [8a](#), decaindo com o tempo. Conclui-se disso que a irreabilidade da coordenada relativa decresce com o tempo, atingindo o valor mínimo quando $\Delta_r = 1$.

A física do processo pode ser entendida da seguinte forma: o estabelecimento da realidade da posição relativa é mimetizada, no referencial do laboratório, pelo estabelecimento

do emaranhamento (correlações quânticas). Se a posição do sistema 1 se correlaciona com a do sistema 2 por meio de emaranhamento, então para o sistema 2 a posição do sistema 1 está bem definida uma vez que a coordenada relativa dos sistemas se torna mais real.

O mesmo não ocorre com a coordenada de centro de massa, uma vez que tem desvio quadrático como dado pela Figura 6b. Isso implementa no modelo efetivo o caráter estatístico do processo de medição, característica não presente no modelo anterior. A posição da partícula estará definida após definir-se também a posição do centro de massa, o que ocorre de forma aleatória dado que sua distribuição de probabilidade não se localiza no tempo.

Como forma de exemplificação, pode-se tomar o estado cuja densidade de probabilidade está representada na Figura 14. No referencial do laboratório, o estado pode ser descrito como

$$|\psi\rangle_L \propto |q_1\rangle_i |q_1 + \delta\rangle_j + |q_2\rangle_i |q_2 + \delta\rangle_j, \quad (4.100)$$

que, a princípio, não fornece qualquer indício de que exista algum elemento de realidade associado a algum observável. No entanto, quando as Gaussianas são suficientemente localizadas, o estado pode ser reescrito nas coordenadas relativa e de centro de massa como [67, 68, 69]

$$|\psi\rangle \propto \left(|q_1 + \frac{\delta}{2}\rangle_c + |q_2 + \frac{\delta}{2}\rangle_c \right) |\delta\rangle_r, \quad (4.101)$$

sendo as posições relativas e de centro de massa calculadas com as fórmulas usuais, $q_c = (q_1 + q_2)/2$ e $q_r = q_2 - q_1$.

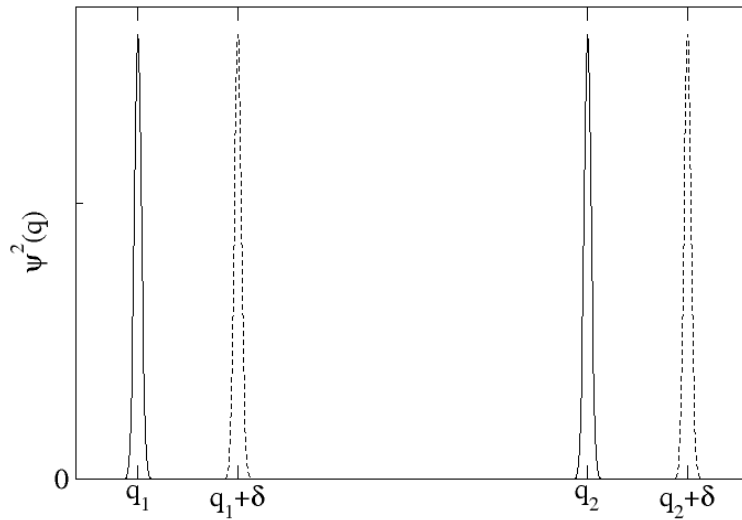


Figura 14 – Densidade de probabilidade de um estado bipartido composto pela superposição de dois estados Gaussianos em cada um dos subsistemas, onde a parte tracejada corresponde à coordenada de índice j e a parte de linha cheia à coordenada de índice i .

Em regimes de tempo suficientemente longos, a coordenada relativa terá irreabilidade suficientemente pequena para que seja desprezada, indicando que o estado (4.101) terá um elemento de realidade associado à posição relativa. Esse elemento de realidade é mimetizado nas coordenadas do laboratório pelo crescimento do emaranhamento entre as partículas.

Esse modelo de massas acopladas consegue então reproduzir os efeitos de realidade e repouso mantendo o caráter estatístico da medição. Como no caso de von Neumann, tem-se aqui um modelo no qual dois sistemas interagentes se correlacionam quanticamente por meio de emaranhamento, implicando que, ao se saber a posição de um dos sistemas, a posição do outro se define instantaneamente. No modelo proposto, isso é resultado da realidade emergente da coordenada relativa entre os sistemas. Da mesma forma que a pré-medida, seria necessário adicionar um processo como o colapso que definisse o valor final da coordenada do centro de massa para concluir o processo de medição com saída única na posição do sistema medido.

5 Conclusão

O advento da teoria Quântica impôs, dentre diversas outras coisas, a necessidade de uma reformulação do que se entende por medição. A partir de então, houve a necessidade de se descrever este processo tal como ele é: um processo dinâmico de interação entre diferentes entidades físicas. Entendê-lo é um passo fundamental na compreensão da teoria e da realidade que se tenta traduzir por meio dela. Seu entendimento, no entanto, ainda apresenta deficiências apesar de as discussões sobre o tema datarem de quase um século e as descrições que se tem até então não são suficientes para se descrever o processo em todos os seus aspectos.

O trabalho realizado teve por objetivo pensar em um modelo efetivo que reproduzisse alguns dos efeitos observados nesse processo: a emergência dinâmica (não instantânea) de realidade e repouso bem como seu caráter estatístico. O principal interesse foi obter uma formulação matematicamente simples e cuja evolução fosse descrita por meio da equação de Schrödinger e de um dado Hamiltoniano. Isso foi realizado considerando-se um modelo efetivo de dissipação quântica proposto por Kanai e Caldirola, para o qual foram derivadas as devidas soluções em diferentes casos.

Foi necessário pensar em um processo de discretização dos espaços de posição e momento a fim de se tratar de suas respectivas realidades. Isso se deu pela dificuldade imposta pelo formalismo contínuo em definir projetores para os operadores Q e P e entropias. Essa necessidade também carrega um aspecto físico, o de que a informação necessária para descrever totalmente uma grandeza contínua é infinita. Caso se deseje descrever, quântica ou classicamente, com precisão absoluta a posição de uma partícula ou sistema físico, são necessárias infinitas casas decimais, algo matematicamente viável mas fisicamente impossível. Experimentalmente isso se manifesta no fato de toda informação dada por determinada medição ser limitada pela resolução máxima do aparato medidor. Pode-se pensar, então, que esse formalismo traduz a imprecisão irreduzível de todo processo de medição.

Teve-se a preocupação em verificar a capacidade desse formalismo discreto em reproduzir os fenômenos físicos descritos pelo formalismo contínuo e o regime no qual essa aproximação é válida. A principal limitação encontrada foi a violação no princípio de incerteza para casos em que o desvio médio da posição do estado fosse menor que a resolução do espaço (δ_q). Outra conclusão foi a de que os espaços de momento e posição têm uma interdependência em suas discretizações, não podendo um ser discreto e o outro contínuo e sendo a convergência para o contínuo de cada um dos espaços condicionada ao caso em que ambas as resoluções vão a zero.

Por se tratarem de espaços dimensionais, foi necessário verificar se ocorria algum tipo de mudança na definição do mapa Φ , da entropia e da irreabilidade. As devidas alterações foram feitas e as propriedades verificadas. Essa adaptação para variáveis contínuas do formalismo de Bilobran e Angelo, que não acomodava a descrição do quantificador de irreabilidade para momento e posição, é uma das contribuições originais do presente trabalho. Seguiu-se então no estudo de alguns casos, sendo o principal interesse os estados Gaussianos, para os quais foi possível derivar uma aproximação analítica da irreabilidade da posição e do momento. Outro ponto desenvolvido foi a complementaridade de elementos de realidade de observáveis incompatíveis, resultado que fornece um limite inferior para a soma das irreabilidades de posição e momento, indicando que ambos não podem ser simultaneamente reais. Resultados matematicamente equivalentes são encontrados na literatura, mas a discretização completa dos espaços permitiu concluir que essa quota inferior é sempre positiva, o que não pôde ser verificado em trabalhos desenvolvidos por outros autores.

Uma vez desenvolvido o quantificador de irreabilidade, procedemos ao estudo de interesse, qual seja aplicar o modelo de KC para a descrição efetiva da medição. Apesar de bastante utilizado em diversas áreas, o modelo escolhido apresenta grande resistência em ser considerado uma descrição real de algum processo quântico, motivo pelo qual foi necessário uma longa análise durante a realização do trabalho para que fosse finalmente eleito. Foi necessário verificar que não ocorre violação entre a posição e o momento canônico, um dos principais motivos pelo qual não há grande aceitação do modelo. Além disso, foi mostrado que na mecânica clássica ocorre de o momento canônico, assim como a Hamiltoniana do sistema, não terem correspondência com grandezas físicas comuns, como velocidade e energia cinética. No caso de sistemas dissipativos, posição e velocidade se mostraram as grandezas que traduzem de fato a física do problema. Em particular, verificamos que o modelo se mostra adequado desde que se faça a devida interpretação da noção de *sistema* e da energia transportada pelo mesmo. No contexto investigado, a energia cinética emergiu como quantidade física adequada, se definida em termos da velocidade em vez do momento canônico.

Na análise quântica foram tratados diferentes casos, inicialmente com o propósito de se validar a evolução promovida pelo Hamiltoniano comparando-a com casos simples conhecidos na literatura e posteriormente os casos de estudo do trabalho. Já no caso de uma partícula amortecida pôde-se descrever de forma razoável a dinâmica do sistema em direção ao *repouso quântico*, apesar de esse modelo não reproduzir vários aspectos desejados. A definição do que seria o repouso dentro do contexto da Mecânica Quântica é feita num primeiro momento por meio de um paralelo clássico, mas é melhor desenvolvido ao se abordar diretamente a questão de medições sucessivas de posição. Ao se medir sucessivamente a posição de determinada partícula, espera-se que não ocorra variação da saída da medição visto que o sistema final seria um autoestado desse observável, o que pode ser entendido como uma forma de repouso. A evolução de uma partícula amortecida,

por não promover localização do estado, não consegue reproduzir esse segundo aspecto do repouso quântico.

O caso de um oscilador harmônico amortecido se mostrou bastante interessante na tentativa de se descrever uma medição. Verificou-se que a partícula sujeita a esse Hamiltoniano satisfaz os dois aspectos do repouso além de promover a realidade da posição da partícula. Tanto a posição quanto a velocidade – a última definida a partir da formulação de Heisenberg – se tornam reais e tendem a valores médios bem definidos, isto é $(\langle Q \rangle, \langle V_H \rangle, \Delta_Q, \Delta_{V_H}) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$. Já o momento canônico e o Hamiltoniano não apresentam representação física, exatamente como no caso clássico. Foi também verificado que não ocorre violação do princípio de incerteza em qualquer dos regimes possíveis do sistema. A deficiência desse modelo está em sua insensibilidade ao caráter estatístico que se tem em medições quânticas, sendo que o valor final da posição é sempre o mesmo quaisquer que sejam a posição ou momento iniciais do pacote Gaussiano.

O último modelo tratado foi o de duas partículas submetidas a um Hamiltoniano dependente do tempo e de potencial relativo, cujo tratamento se deu tanto em coordenadas originais (do laboratório) quanto em relativa e de centro de massa. Nesse caso, como no precedente, verifica-se a emergência do repouso da coordenada relativa da posição. Foi possível também manter o caráter estatístico da medição, pois o valor final desta depende da definição da coordenada do centro de massa, que se daria por meio do colapso. Verificou-se também a simultaneidade entre o surgimento de emaranhamento entre as corpos e de realidade da posição relativa. Esse resultado aponta para um aspecto interessante: o estabelecimento da realidade da posição da partícula em relação ao aparato é descrito, no referencial do laboratório, em termos de correlações quânticas (emaranhamento, neste caso particular). Esta observação indica uma possível interpretação para estados emaranhados.

A evolução histórica da descrição do processo de medição se iniciou com a consideração de que o caráter quântico se restringia à partícula a ser medida (interpretação de Copenhague). Na sequência, Von Neumann propôs uma descrição que considerasse também o caráter quântico do aparato, concebendo a medição como um processo dinâmico entre este e a partícula a ser medida. Os modelos aqui trabalhados seguiram um paralelo com essa evolução histórica, partindo de um modelo de uma única partícula, que se mostrou insatisfatório ao descrever diversos aspectos do processo, e seguindo para um modelo que descrevesse a interação de dois corpos, similar à proposta de von Neumann e se mostrando mais adequado em seu objetivo. Baseando-se nessa evolução, uma das possibilidades futuras seria a consideração de um sistema aberto, como ocorre no contexto da descoerência. Nesse caso, o objetivo seria descrever a medição a partir de um Hamiltoniano independente do tempo que englobe sistema, aparato e ambiente. Outra questão que se mostra interessante é o entendimento de aspectos de irreversibilidade no processo da medição.

Referências

- 1 BOHM, D. Book. *Fragmentation and wholeness*. [S.l.]: Van Leer Jerusalem Foundation Jerusalem, 1976. 90 p. : p. Citado na página 11.
- 2 SCHLOSSHAUER, M.; KOFLER, J.; ZEILINGER, A. A Snapshot of Foundational Attitudes Toward Quantum Mechanics. p. 1–17. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 23.
- 3 NORSEN, T.; NELSON, S. Yet Another Snapshot of Foundational Attitudes Toward Quantum Mechanics. p. 1–11, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 23.
- 4 MERMIN, N. D. Fixing the shifty split. Cambridge University Press, p. 219–226, 2016. Citado na página 12.
- 5 CABELLO, A. Interpretations of quantum theory: A map of madness. *ArXiv e-prints*, set. 2015. Citado na página 12.
- 6 WALLACE, D. The Quantum Measurement Problem : State of Play. *Measurement*, n. July, p. 1–85, 2007. Citado na página 12.
- 7 WHEELER, J. A.; ZUREK, W. H. *Quantum Theory and Measurement*. [S.l.: s.n.], 2014. 842 p. ISBN 9780691613161. Citado na página 12.
- 8 BOHR, N. Discussion with einstein on epistemological problems in atomic physics. Open Court, p. 199–241, 1949. Citado na página 12.
- 9 BOHR, N. The quantum postulate and the recent development of atomic theory. *Nature*, v. 121, p. 580–590, 1928. Citado na página 12.
- 10 HEISENBERG, W. *The Physical Principles of the Quantum Theory*. [S.l.]: Chicago: Ill., The University of Chicago Press, 1930. Citado na página 12.
- 11 NEUMANN, J. von. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. [S.l.: s.n.], 1955. 464 p. ISBN 0691028931. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 23.
- 12 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 47, p. 777–780, May 1935. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 26.
- 13 BILOBRAN, A. L. O.; ANGELO, R. M. A measure of physical reality. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 112, n. 4, p. 40005, 2015. ISSN 0295-5075. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 26.
- 14 MAZIERO, J. Entendendo a entropia de von Neumann. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 37, n. 1, p. 1314, 2015. ISSN 1806-9126. Citado na página 20.
- 15 HU, X.; YE, Z. Generalized quantum entropy. *Journal of Mathematical Physics*, v. 47, n. 2, 2006. ISSN 00222488. Citado na página 21.
- 16 BOSYK, M. et al. A family of generalized quantum entropies: definition and properties. Citado na página 22.

- 17 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. [S.l.: s.n.], 2010. 702 p. ISSN 00029505. ISBN 1107002176. Citado 4 vezes nas páginas [22](#), [28](#), [56](#) e [57](#).
- 18 BUCHLEITNER, A.; VIVIESCAS, C.; TIERSCH, M. *Entanglement and Decoherence*. [S.l.: s.n.], 1879. 153 p. ISSN 0028-0836. ISBN 3540231250. Citado na página [23](#).
- 19 BRUSS, D. Characterizing entanglement. *Journal of Mathematical Physics*, v. 43, n. 9, p. 4237–4251, 2002. ISSN 00222488. Citado na página [23](#).
- 20 BÄCHTOLD, M. Five formulations of the quantum measurement problem in the frame of the standard interpretation. *Journal for General Philosophy of Science*, v. 39, n. 1, p. 17–33, Sep 2008. ISSN 1572-8587. Citado na página [23](#).
- 21 SCHLOSSHAUER, M. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 76, p. 1267–1305, Feb 2005. Citado na página [23](#).
- 22 BALLENTINE, L. The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. *Reviews of Modern Physics*, v. 42, n. 4, p. 358–381, 1970. ISSN 0034-6861. Citado na página [23](#).
- 23 BUB, J. *Interpreting the Quantum World*. [S.l.: s.n.], 1999. Citado na página [23](#).
- 24 SHOR, P. W. Why haven't more quantum algorithms been found? *J. ACM*, ACM, New York, NY, USA, v. 50, n. 1, p. 87–90, jan. 2003. ISSN 0004-5411. Citado na página [23](#).
- 25 ZUREK, W. H. Decoherence and the Transition from Quantum to Classical. *Physics Today*, v. 44, n. 10, p. 36, 1991. ISSN 00319228. Citado na página [25](#).
- 26 ZUREK, W. H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 75, p. 715–775, May 2003. Citado na página [25](#).
- 27 SCHLOSSHAUER, M. Decoherence, the Measurement Problem, and Interpretations of Quantum Mechanics. *Reviews of Modern Physics*, v. 76, n. 4, p. 1267–1305, 2005. Citado 2 vezes nas páginas [25](#) e [26](#).
- 28 MARSH, C. Introduction to Continuous Entropy. p. 1–17, 2013. Citado 2 vezes nas páginas [29](#) e [42](#).
- 29 JAYNES, E. T. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 106, p. 620–630, May 1957. Citado na página [30](#).
- 30 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. [S.l.: s.n.], 2010. 550 p. ISSN 00029505. ISBN 9780805382914. Citado 3 vezes nas páginas [31](#), [56](#) e [57](#).
- 31 TIONG, N. S. Elliptic Functions , Theta Functions and Identities. 2004. Citado na página [38](#).
- 32 BIALYNICKI-BIRULA, I.; RUDNICKI, Ł. Entropic Uncertainty Relations in Quantum Physics. *Statistical Complexity*, p. 1–34, 2011. Citado na página [44](#).

- 33 RAJAGOPAL, A. K. The Sobolev inequality and the Tsallis entropic uncertainty relation. *Physics Letters A*, v. 205, n. 1, p. 32–36, 1995. ISSN 03759601. Citado na página [44](#).
- 34 BIALYNICKI-BIRULA, I.; MYCIELSKI, J. Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics. *Commun. Math. Phys.*, v. 44, p. 129–132, 1975. Citado na página [44](#).
- 35 BIALYNICKI-BIRULA, I. Formulation of the uncertainty relations in terms of the Rényi entropies. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, v. 74, n. 5, p. 1–6, 2006. ISSN 10502947. Citado na página [44](#).
- 36 JAMMER, M. *Concepts of Force*. [S.l.: s.n.], 1957. ISBN 9780131395312. Citado na página [45](#).
- 37 DEKKER, H. *Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator*. 1981, 1–110 p. Citado 2 vezes nas páginas [45](#) e [50](#).
- 38 WANG, Q. A.; WANG, R. Is it possible to formulate least action principle for dissipative systems? *arXiv preprint arXiv:1201.6309*, p. 16, 2012. Citado na página [45](#).
- 39 BRITTIN. A note on ‘The quantization of non-holonomic mechanics’. v. 580, n. 3, 1950. Citado 3 vezes nas páginas [45](#), [46](#) e [63](#).
- 40 CALDIROLA, P. On the quantum problem of the motion of a particle in a viscous medium. *Lettere al Nuovo Cimento*, v. 20, n. 16, p. 589–592, 1977. ISSN 0375930X. Citado na página [45](#).
- 41 CRESPO, G. et al. Information theory and nonlinear quantal Hamiltonians. *Physical Review A*, v. 39, n. 4, p. 2133–2140, 1989. ISSN 10502947. Citado 2 vezes nas páginas [45](#) e [46](#).
- 42 DEKKER, H. On the phase space quantization of the linearly damped harmonic oscillator. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 95, n. 2, p. 311–323, 1979. ISSN 03784371. Citado 2 vezes nas páginas [45](#) e [50](#).
- 43 GREENBERGER, D. M. A new approach to the problem of dissipation in quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, v. 20, n. 1979, p. 771, 1979. ISSN 00222488. Citado 2 vezes nas páginas [45](#) e [46](#).
- 44 HASSE, R. W. On the quantum mechanical treatment of dissipative systems. *Journal of Mathematical Physics*, v. 16, n. 10, p. 2005, 1975. ISSN 00222488. Citado na página [45](#).
- 45 CALDIROLA, P. Forze non conservative nella meccanica quantistica. *Il Nuovo Cimento*, v. 18, n. 9, p. 393–400, 1941. ISSN 0029-6341. Citado na página [45](#).
- 46 KANAI, E. On the quantization of the dissipative systems*. *Progress of Theoretical Physics*, v. 3, n. 4, p. 440–442, 1948. Citado 2 vezes nas páginas [45](#) e [46](#).
- 47 TARTAGLIA, A. A canonical approach to the quantum problem on the motion of a particle in a viscous medium. *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, v. 19, n. 6, p. 205–209, Jun 1977. ISSN 1827-613X. Citado 2 vezes nas páginas [46](#) e [63](#).

- 48 OTERO, D. et al. Quantal friction, nonlinear hamiltonians, and information theory. *Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei*, v. 316, n. 3, p. 323–329, Oct 1984. ISSN 0939-7922. Citado na página 46.
- 49 GREENBERGER, D. A critique of the major approaches to damping in quantum theory. *Journal of Mathematical Physics*, v. 20, n. 1979, p. 762, 1979. ISSN 00222488. Citado na página 46.
- 50 SCHUCH, D. Nonunitary connection between explicitly time-dependent and nonlinear approaches for the description of dissipative quantum systems. *Physical Review A*, v. 55, n. 2, p. 935–940, 1997. ISSN 1050-2947. Citado na página 46.
- 51 SCHUCH, D. Effective Description of the Dissipative. v. 72, p. 537–547, 1998. Citado na página 46.
- 52 BEN-ARYEH, Y. Harmonic oscillator with time-dependent effective-mass and frequency with a possible application to 'chirped tidal' gravitational waves forces affecting interferometric. *arXiv preprint arXiv:0807.4670*, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 51.
- 53 BROWN, L. S. Quantum motion in a paul trap. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 66, p. 527–529, Feb 1991. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.527>>. Citado na página 46.
- 54 SUN, C.-P.; YU, L.-H. Exact dynamics of a quantum dissipative system in a constant external field. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 51, p. 1845–1853, Mar 1995. Citado na página 46.
- 55 YU, L. *An exact solution for quantum tunneling in a dissipative system*. [S.l.], 1996, v. 54, n. 5, 3779–3782 p. Citado na página 46.
- 56 LEWIS, H. R.; RIESENFELD, W. B. An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field. *Journal of Mathematical Physics*, v. 10, n. 8, p. 1458, 1969. ISSN 00222488. Citado na página 50.
- 57 PEDROSA, I. A. Exact wave functions of a harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency. *Physical Review A (Atomic)*, v. 55, n. 4, p. 3219, 1997. ISSN 10502947. Citado na página 50.
- 58 RAZAVY, M. *Dissipative Classical and Quantum Systems*. [S.l.]: Imperial College, 2005. ISBN 1860945309. Citado na página 50.
- 59 UM, C. I.; YEON, K. H.; GEORGE, T. F. The quantum damped harmonic oscillator. *Physics Report*, v. 362, n. 2-3, p. 63–192, 2002. ISSN 03701573. Citado na página 50.
- 60 EXNER, P. Complex-potential description of the damped harmonic oscillator
Complex-potential description of the damped harmonic oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, v. 24, n. 1129, 1983. Citado na página 50.
- 61 PEPORE, S. et al. Path integral for a harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency. *ScienceAsia*, v. 32, n. 2, p. 173–179, 2006. ISSN 15131874. Citado na página 50.

- 62 BASKOUTAS, S.; JANNUSSIS, A.; MIGNANI, R. Study of the generalized parametric oscillator. *Physics Letters A*, v. 164, n. 1, p. 17–22, 1992. ISSN 03759601. Citado na página 50.
- 63 BASKOUTAS, S.; JANNUSSIS, A.; MIGNANI, R. Time evolution of Caldirola-Kanai oscillators. *Il Nuovo Cimento B*, v. 108, n. 9, p. 953–966, 1993. ISSN 03693554. Citado na página 50.
- 64 WEI, J.; NORMAN, E. Lie Algebraic Solution of Linear Differential Equations. *Journal of Mathematical Physics*, v. 4, n. 4, p. 575–581, 1963. ISSN 0022-2488. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- 65 PEDROSA, I.; SERRA, G.; GUEDES, I. Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation. *Physical Review A*, v. 56, n. 5, p. 4300–4303, 1997. ISSN 1050-2947. Citado na página 50.
- 66 CHENG, C. M.; FUNG, P. C. The evolution operator technique in solving the Schrodinger equation, and its application to disentangling exponential operators and solving the problem of a mass-varying harmonic oscillator. *Journal of Physics A: General Physics*, v. 21, n. 22, p. 4115–4131, 1988. ISSN 03054470. Citado na página 51.
- 67 ANGELO, R. M. et al. Physics within a quantum reference frame. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 44, n. 14, 2011. ISSN 17518113. Citado na página 69.
- 68 ANGELO, R. M.; RIBEIRO, A. D. Kinematics and dynamics in noninertial quantum frames of reference. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 45, n. 46, 2012. ISSN 17518113. Citado na página 69.
- 69 PEREIRA, S. T.; ANGELO, R. M. Galilei covariance and Einstein’s equivalence principle in quantum reference frames. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, v. 91, n. 2, p. 1–7, 2015. ISSN 10941622. Citado na página 69.